Le petit point de cours (3), une correction

1. Y a-t-il équivalence entre convergence absolue et convergence pour les intégrales impropres ?

   La réponse est NON ! Pour une intégrale impropre, l'absolue convergence (c'est à dire l'intégrabilité de la fonction dans l'intégrale) implique la convergence de l'intégrale impropre, **sans réciproque**.

2. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. Que signifie l'expression « f *est intégrable sur* $]0,+\infty[$ » ?

   L'expression « f *est intégrable sur* $]0,+\infty[$ » signifie que :
   (a) f est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$;
   (b) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

3. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, continue, telle que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On pose pour $x > 0$: $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   a. Étudier la limite de R en $+\infty$.

   Comme l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on peut dire que $\displaystyle\int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.
   Mais pour tout $x > 0$ réel on a : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}_{F(x)} + \underbrace{\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}_{=R(x)}$, donc :

   $$R(x) = \ell - F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   b. Démontrer que R est une fonction de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et donner R'.

   Avec les notations ci-dessus on a $R = \ell - F$. Mais comme f est continue sur $]0,+\infty[$, la fonction F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ avec $F' = f$. Il en résulte que R est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ avec $R' = -f$.

4. Démontrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   - La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   - On a $\dfrac{\sin t}{t} \underset{0^+}{\sim} 1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est faussement impropre : $\boxed{\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$.
   - Si $X > 0$, une intégration par partie donne :

   $$\begin{aligned}\int_1^{X} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t &= \left\{\frac{-\cos t}{t}\right]_1^{X} - \int_0^{X} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \cos 1 - \frac{\cos X}{X} - \int_1^{X} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   Mais :

(A) La fonction cos est bornée sur $\mathbb{R}$ d'où $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos X}{X} = 0$.

(B) Pour tout $t > 0$ réel on a $\displaystyle\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$. Ainsi, comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente (intégrale de Riemann) l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument converge, par domination, donc convergente.

(A) et (B) permettent d'affirmer que $\displaystyle\exists \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ ce qui signifie que l'intégrale impropre $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

- Les deux résultats encadrés ci-dessus assurent que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5. Soit α un réel. Quand l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est-elle convergente ? (on énoncera avec précision les résultats).

Cette intégrale impropre ne converge jamais. En effet :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$;

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

6. Quelle est la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$?

- la fonction $f : t \mapsto (\ln t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- On a $t^2 f(t) \underset{t\to+\infty}{0}$ par croissance comparées donc $f(t) = \underset{t\to+\infty}{=}$ normalfonto($\frac{1}{t^2}$). Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, il en va de même de la fonction f.
- On a $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \ln t$. Or ln est intégrable en 0 donc f aussi.

Conclusion. Avec les trois précédents, on peut dire que f est intégrable sur $]0, +\infty[$. Ainsi l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

7. **Bonus.** La fonction $\displaystyle x \mapsto \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

On a $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t}$. Or $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0, donc $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ non plus. Comme il s'agit d'une fonction positive, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{\to0}^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas convergente : la fonction $\displaystyle x \mapsto \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.