
La fonction tangente.

- La fonction tangente est définie partout où le cosinus ne s'annule pas par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

On a donc $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Sous forme d'intervalle, la source de la fonction tangente est :

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$$

- Cette fonction est π -périodique. En effet pour $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ on a :

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

- La fonction tan est impaire : pour $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ on a : $\tan(-x) = -\tan x$.

• La fonction tangente est dérivable sur chaque intervalle de son domaine de définition (comme quotient de fonctions dérivables). Pour $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ on a :

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

Il en résulte que tan est **strictement croissante** sur chaque intervalle de son **domaine de définition**.

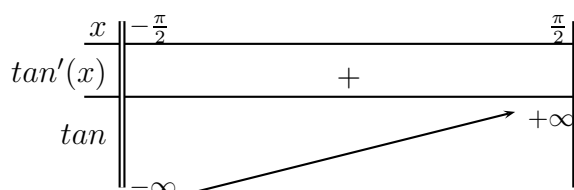
- Un petit calcul montre que l'on a la formule suivante qui est bien plus utile :

$$\boxed{\tan' = 1 + \tan^2}$$

• La restriction de tan à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une fonction strictement croissante. Comme $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \text{ et par imparité } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty.$$

On a donc le tableau de variation suivant sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:



Comme $\tan$ est une fonction continue, elle induit une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque se note $\arctan$. On a donc pour x dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et y réel :

$$y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y.$$

- Le graphe de $\tan$ est le suivant.

