

Problème supplémentaire 5/2 n° 4

L'objectif de ce problème est de démontrer un résultat central de la théorie spectrale (le théorème de Bezout de décomposition des noyaux) et d'en voir quelques applications.

Dans tout le problème le corps de base est $\mathbb{C}$.

On rappelle les résultats suivants :

- Le théorème de d'ALEMBERT-GAUSS : *tout polynôme complexe non constant admet une racine.*
- La division euclidienne des polynômes : *pour A et B dans $\mathbb{C}[X]$, il existe un unique couple (Q, R) dans $\mathbb{C}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.*

Dans la suite E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et f désigne un endomorphisme de E .

Partie 1 - Quelques résultats utiles pour la suite

1. Soient A dans $\mathbb{C}[X]$ non constant et $\alpha \in \mathbb{C}$.
 - a. Démontrer que α est racine de A si et seulement si $(X - \alpha)$ divise A (i.e. le reste de la division euclidienne de A par $X - \alpha$ est nul).
 - b. Justifier que A peut s'écrire $A = z \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i)^{m_i}$ où les m_i et m sont dans $\mathbb{N}^*$, les α_i des complexes distincts et $z \in \mathbb{C}$.
2. **Un peu d'arithmétique des polynômes : le théorème de Bezout**
 Soient $a \geq 1$ et $b \geq 1$ deux entiers, A et B dans $\mathbb{C}[X]$ **sans racines communes** tels que $\deg A = a$ et $\deg B = b$.
 On veut démontrer dans cette question l'existence de U et V dans $\mathbb{C}[X]$ tels que :

$$UA + VB = 1$$

Pour cela on définit l'application $\varphi : \mathbb{C}_{b-1}[X] \times \mathbb{C}_{a-1}[X] \rightarrow \mathbb{C}_{a+b-1}[X]$ par :

$$\varphi(U, V) = UA + VB$$

- a. Démontrer que φ est linéaire.
- b. On suppose qu'il existe U et W dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $UA = WB$. Démontrer que B divise U et que A divise W (on pourra raisonner avec les racines de A et B et leurs multiplicités).
- c. En déduire que φ est un isomorphisme et démontrer le résultat recherché.

Partie 2 - Le théorème de Bezout de décomposition des noyaux

3. On suppose dans cette question que A et B sont deux éléments de $\mathbb{C}[X]$ non constant et sans racine commune.
 - a. Démontrer que $\ker A(f)$ et $\ker B(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\ker(AB)(f)$.
 - b. Soient U et V dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $UA + VB = 1$. Soit x dans $\ker(AB)(f)$, on pose $y = (BV)(f)(x)$ et $z = (AU)(f)(x)$.
 Démontrer que $x = y + z$ puis que $y \in \ker A(f)$ et $z \in \ker B(f)$.
 - c. En déduire que $\ker(AB)(f) = \ker A(f) \oplus \ker B(f)$.
4. Soient $P_1, \dots, P_m$ dans $\mathbb{C}[X]$ non constants et tels que si $i \neq j$ les polynômes P_i et P_j n'aient pas de racine commune.

$$\text{Démontrer que : } \ker(P_1 \dots P_m)(f) = \bigoplus_{i=1}^m \ker(P_i)(f).$$

*Ce dernier résultat est le **théorème de Bezout de décomposition des noyaux**. Il est en fait valable pour n'importe quel corps de base...*

Partie 3 - Applications en dimensions finies

Dans cette partie E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $n \geq 1$.

4. Démontrer qu'il existe P non nul dans $\mathbb{C}[X]$ qui annule f . Expliquer pourquoi on peut choisir P unitaire.

Dans la suite on note donc P un polynôme non nul unitaire qui annule f et on écrit :

$$P = \prod_{k=1}^m (X - a_k)^{m_k}$$

où les a_k sont des complexes distincts et où m et chaque m_k sont dans $\mathbb{N}^*$.

Pour k dans $\{1, \dots, m\}$ on note $F_k = \ker(f - a_k \text{Id}_E)^{m_k}$

5. Démontrer que $E = \bigoplus_{k=1}^m F_k$.
6. Soit h dans $\mathcal{L}(E)$ et $p \geq 1$ entier.
Démontrer que $\ker h \subset \ker(h^p)$ et en déduire que h est injectif si et seulement si h^p est injectif.
7. Justifier que f admet alors au moins une valeur propre et démontrer que les valeurs propres de f sont exactement les a_k tels que $\dim(F_k) > 0$.

Dans la suite on note $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres de f (que l'on prend donc parmi les a_k). On note n_k la multiplicité de λ_k comme racine de P . On pose :

$$T = \prod_{k=1}^s (X - \lambda_k)^{n_k}$$

Pour tout k dans $\{1, \dots, s\}$ on pose $G_k = \ker(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{n_k}$.

8. Démontrer que $T(f) = 0$ puis que $E = \bigoplus_{k=1}^s G_k$.
9. Soit k dans $\{1, \dots, s\}$.
- a. Démontrer que G_k est stable par f .
On notera dans la suite du problème f_k l'endomorphisme induit sur G_k par f et on pose $g_k = f_k - \lambda_k \text{Id}_{G_k}$.
- b. Démontrer que $g_k^{n_k} = 0$.

Pour la suite du problème on notera r_k le plus petit entier i tel que $g_k^i = 0$.

10. Démontrer qu'il existe x_k dans G_k tel que $(x_k, g_k(x_k), \dots, g_k^{r_k-1}(x_k))$ soit libre dans G_k . Qu'en déduire pour $\dim G_k$?
11. On pose, avec les notations ci-dessus $\mu_f = \prod_{k=1}^s (X - \lambda_k)^{r_k}$. Ce dernier polynôme M_f s'appelle le **polynôme minimal** de f .
- a. Démontrer que $\deg(\mu_f) \leq n$ et $\mu_f(f) = 0$.
- b. Démontrer que tout polynôme non nul qui annule f est divisible par μ_f .
- c. Démontrer que f est diagonalisable si et seulement si μ_f est à racines simples.
Ce résultat est encore vrai lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$...

12. **Un exemple.** Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(M) = {}^t M$. Déterminer le polynôme minimal de φ .

13. **Un deuxième exemple.** On considère la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- a. Déterminer un polynôme annulateur de U et en déduire son polynôme minimal.
- b. En déduire les valeurs propres sur $\mathbb{C}$ de U ainsi que les espaces propres associés.

FIN DE L'ÉNONCÉ
