Problème supplémentaire 5/2 n° 3, une correction

1. Le terme général de AX est $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.
   Par hypothèse, $\forall i, j,\ a_{ij} > 0$ et $x_j \geqslant 0$. Comme $X \neq 0$, l'un des x_j est strictement positif. Donc le terme général est strictement positif.
   Le terme général de $|AB|$ est $\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|$ que l'on peut majorer, grâce à l'inégalité triangulaire par $\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}|$ qui est le terme général de $|A||B|$.
   De ce fait le terme général de $|A||B| - |AB|$ est positif et ainsi $|AB| \leqslant |A||B|$
2. C-S : $|(X|Y)| \leqslant \|X\|.\|Y\|$.
   Il suffit de poser $x_k = |z_k|$ et $y_k = |w_k|$, réels (positifs) pour obtenir l'inégalité proposée avec le produit scalaire canonique.
3. $|1 + z| = 1 + |z|$. On élève au carré et on transforme le carré du module en $z\overline{z}$.
   On obtient alors $1 + z + \overline{z} + z\overline{z} = 1 + 2|z| + z\overline{z}$ d'où $z + \overline{z} = 2|z|$.
   On utilise l'écriture algébrique, soit $2a = 2\sqrt{a^2 + b^2}$. Donc $a \geqslant 0$ et en élevant au carré de nouveau, on récupère $b = 0$.
   z est bien un réel positif.
   Comme $|z| \neq 0$, $|z + z'| = |z| + |z'|$ devient $|z|\left|1 + \frac{z'}{z}\right| = |z|\left(1 + \frac{|z'|}{|z|}\right)$. On simplifie donc par $|z|$ et on retrouve le cas précédent. Donc $\frac{z'}{z}$ est un réel positif comme voulu.
4. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $z_1 \neq 0$.
   En utilisant l'inégalité triangulaire, on a
   $$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| \leqslant |z_1 + z_k| + \sum_{j\neq 1,k} |z_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$
   Or les sommes initiale et finale sont égales donc $\forall k \in [[1, n]]$, $|z_1 + z_k| = |z_1| + |z_k|$. Ce qui prouve, en utilisant la Q3, qu'il existe α_k, réel positif, tel que $z_k = \alpha z_1$. Dit autrement, les z_k possèdent le même argument et cela fournit l'écriture exponentielle de z_k.
5. $\chi_A = X^2 - (a + d)X + ad - bc$ donc $\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc$
6. $b > 0$ et $c > 0$ donc $\Delta > 0$. Le polynôme caractéristique possède donc deux racines distinctes λ et μ. La matrice A est donc diagonalisable et est donc semblable à la matrice proposée.
7. On a choisi $\lambda < \mu$. Ainsi, comme a et d sont positifs, strictement, $\lambda = \frac{a + d - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $\mu = \frac{a + d + \sqrt{\Delta}}{2}$
   On utilise de nouveau l'inégalité triangulaire : $|a + d - \sqrt{\Delta}| \leqslant |a + d| + \sqrt{\Delta}$ Comme $a + d > 0$, on obtient bien le numérateur de μ. L'inégalité est stricte car $\Delta > 0$
8. Notons D la matrice diagonale formée des deux valeurs propres. Il existe P inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
   Une récurrence élémentaire fournit $A^k = PD^kP^{-1}$. Ainsi (A^k) converge si et seulement si (D^k) converge. Or D^k =diag(μ^k, λ^k).
   Ces quantités convergent si et seulement si $\lambda \in]-1, 1]$ et $\mu \in]-1, 1]$. Si $\mu < 1$ alors la limite est la matrice nulle.
   De ce fait (A^k) converge vers une matrice L non nulle si et seulement si $\mu = 1$. On obtient alors $L = P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$
   La matrice diagonale est clairement de rang 1. Comme P est inversible, L est de rang 1 et $L^2 = L$ évidemment.
9. On applique ce qui précède à B car ses coefficients sont strictement positifs. $\Delta = (\beta - \alpha)^2 + 4\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$
   Donc $\lambda = \frac{(2 - \alpha - \beta) - (\alpha + \beta)}{2} = 1 - \alpha - \beta$ et $\mu = 1$.
   Un vecteur propre associé à 1 est (β, α), un vecteur propre associé à $1 - \alpha - \beta$ est $(-1, 1)$ Cela fournit donc la matrice S.

10. Un calcul d'inverse fournit la matrice L calculée précédemment : $L = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix}\beta & \beta\\ \alpha & \alpha\end{pmatrix}$

11. On montre d'abord que $\|.\|_\infty$ est une norme. La positivité et l'homogénéité sont claires. Pour la séparation, si $\|A\|_\infty = 0$, alors pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$ donc comme c'est une somme de termes positifs, pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, $a_{i,j} = 0$ donc $A = 0$. Pour l'inégalité triangulaire, si A et B sont deux matrices et $i \in \{1,\dots,n\}$,
$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j}+b_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leqslant \|A\|_\infty + \|B\|_\infty.$$
Par passage au max, $\|A+B\|_\infty \leqslant \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$.
On montre ensuite qu'elle est sous-multiplicative :
$$\|AB\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right|\right)$$
Or
$$\sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right| \leqslant \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n |a_{ik}||b_{kj}|$$
On échange les sommations. Or $\sum_j |b_{kj}| \leqslant \|B\|_\infty$. Il reste alors $\sum_{k=1}^n |a_{ik}|$ que l'on majore de même.

12.
$$\begin{aligned}\|AB\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right|^2\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2\right)\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2\\ &\leqslant \|A\|^2\|B\|^2\end{aligned}$$

13. $\nu(A)$ est un réel positif.
$\nu(A+B) = N(SAS^{-1}+SBS^{-1}) \leqslant N(SAS^{-1}) + N(SBS^{-1}) \leqslant \nu(A)+\nu(B)$
$\nu(\lambda A) = N(S\lambda AS^{-1}) = |\lambda|N(SAS^{-1}) = |\lambda|\nu(A)$
$\nu(A) = 0 = N(SAS^{-1})$. Comme N est une norme $SAS^{-1} = 0$ et ainsi $A = 0$
Donc ν est une norme.
Et enfin $\nu(AB) = N(SAS^{-1}SBS^{-1}) \leqslant N(SAS^{-1})N(SBS^{-1}) \leqslant \nu(A)\nu(B)$

14. A et SAS^{-1} sont semblables donc ont mêmes valeurs propres. Leur rayon spectral est donc le même.

15. Le polynôme caractéristique est toujours factorisable dans $\mathbb{C}$ donc A est trigonalisable.
$A = PTP^{-1}$ Les valeurs propres de T^k sont λ_i^k et ainsi $\rho(A^k) = \rho(A)^k$
Les valeurs propres de αA sont $\alpha\lambda_i$ donc $\rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A)$

16. Soit λ une valeur propre de A. Il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Notons alors H la matrice dont la première colonne est X et les colonnes suivantes sont nulles. Alors, évidemment, $AH = \lambda H$
Comme N est sous-multiplicative, $N(AH) \leqslant N(A)N(H)$ soit $N(\lambda H) \leqslant N(A)N(H)$ puis $|\lambda| \leqslant N(A)$ car $N(H) > 0$.
Cela prouve que $\rho(A) \leqslant N(A)$

17. Quand on multiplie par la gauche avec une matrice diagonale, on multiplie la ligne par le coefficient diagonal correspondant. La multiplication à droite multiplie la colonne.
On obtient donc une matrice triangulaire supérieure de coefficient, en position (i,j), $\tau^{1-i}T_{ij}\tau^{j-1} = \tau^{j-i}T_{ij}$.

18.
$$\begin{aligned}\|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty &= \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=i}^n \tau^{j-i}|T_{ij}|\right) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(|T_{ii}| + \sum_{j=i+1}^n \tau^{j-i}|T_{ij}|\right)\\ &\leqslant \rho(A) + \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=i+1}^n \tau^{j-i}|T_{ij}|\right)\end{aligned}$$

Et il existe δ tel que pour $\tau \leqslant \delta$, les sommes soient inférieures à ϵ

19. $T = P^{-1}AP$. On a donc $\|D_\tau^{-1}P^{-1}APD_\tau\|_\infty \leqslant \rho(A) + \epsilon$. Et ainsi, d'après la question 13, on a bien créé une norme sous-multiplicative vérifiant l'inégalité demandée.
20. Si $\rho(A) < 1$, soit $\epsilon > 0$ tel que $\rho(A)+\epsilon < 1$. Par la question précédente il existe une norme sous-multiplicative N telle que $N(A) \leqslant \rho(A)+\epsilon$. Par sous-multiplicativité de N, pour tout $k \geqslant 1$, $N(A^k) \leqslant N(A)^k \leqslant (\rho(A)+\epsilon)^k$ qui tend vers 0. Ainsi $N(A^k)$ tend vers 0 donc A^k tend vers 0 (comme on est en dimension finie, le fait pour une suite de tendre vers 0 ne dépend pas de la norme choisie).
    Réciproquement, $\rho(A^k) \leqslant N(A^k)$ donc $\rho(A)^k$ tend vers zéro ce qui fournit $\rho(A) < 1$.
21. A est sym réelle donc d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable et les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
22. Si $\rho(A) = 0$ alors la seule valeur propre est zéro. Comme A est diagonalisable, $A = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.
23. Il existe une base orthonormée de vecteurs propres (e_i). Notons $(x_1, \ldots, x_n)$ les composantes de X relativement à cette base. Alors $AX = (\lambda_i x_i)_i$ et $X^T AX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ par orthogonalité.
    Il suffit alors de majorer λ_i par μ et utiliser le fait que X est unitaire pour obtenir l'inégalité voulue.
24. Si X est un vecteur propre associé à μ alors on obtient évidemment l'égalité. Réciproquement, si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = \mu$ alors $\sum_{i=1}^{n} (\mu - \lambda_i)x_i^2 = 0$. Il s'agit d'une somme de termes positifs, nulle. Donc chaque terme est nul. Si $\mu \neq \lambda_i$ cela signifie que $x_i = 0$. Par contre, lorsque $\mu = \lambda_i$, x_i peut être non nul et comme la somme des x_i^2 vaut 1, l'un au moins est non nul. Cela signifie donc que X est vecteur propre associé à μ.
25. Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire et de réutiliser la technique de la question 23 pour majorer ensuite par μ
26. Pour X vecteur propre unitaire associé à une valeur propre λ de A, $|\lambda| = |X^T AX| \leqslant \mu$ par la question précédente, d'où $\rho(A) \leqslant \mu$. Or μ est une valeur propre de A donc $\mu \leqslant \rho(A)$ et finalement $\mu = \rho(A) = r$.
27. Soit X un vecteur propre de A associé à r, alors $X \neq 0$ donc $|X| \neq 0$. On utilise la question 25 :
    $$r = |r| = |X^T AX| \leqslant |X|^T A|X| \leqslant r$$
    donc il n'y a que des égalités. Donc $|X|^T A|X| = r$ et, par la question 24, $r|X| = A|X|$ et $|X|$ est vecteur propre associé à r.
    Montrons maintenant que $|X| > 0$. Si l'une des coordonnées de $|X|$ est nulle cela signifie que $\sum a_{ij}|x_j| = 0$ pour cette ligne i. Or $A > 0$. Cela signifierait que tous les x_i sont nuls ce qui est absurde.
28. La question revient à montrer que tous les coefficients de X sont de même signe. On a $|X| > 0$ donc aucun coefficient de X n'est nul.
    Par ce qui précède $|AX| = |rX| = r|X| = A|X|$ et on revient aux coordonnées, c'est-à-dire que pour tout i entre 1 et n :
    $$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j|$$
    en utilisant que les $a_{i,j}$ sont strictement positifs. On peut donc appliquer la question 4. Comme les x_i sont réels, il vient $e^{i\theta} = \pm 1$, ce qui signifie que tous les x_i sont de même signe.
29. On considère donc X_1 et X_2 deux vecteurs propres orthogonaux associés à r. D'après ce qui précède, tous les coefficients de X_1 et X_2 sont non nuls et de signe constant.
    On a $X_1^T X_2 = 0$ ce qui impossible d'après le signe de la somme. Donc le sous-espace propre est de dimension 1.
30. Comme A est diagonalisable, la multiplicité de r est la dimension du sous-espace propre soit 1.
    Considérons λ tel que $|\lambda| = r$ et $AX = \lambda X$ alors $A|X| = r|X|$. Or $X = \pm|X|$. Donc on a $AX = rX$ c'est-à-dire que X est aussi vecteur propre associé à r. Donc $\lambda = r$.
31. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ possède les vp -1 et 1.
32. $A^p X = r^p X$ et on peut appliquer le IV - B. Donc $X = \pm|X|$ et $|X| > 0$ et on obtient bien le sous espace propre de dimension 1 engendré par un vecteur positif.

33. Si p est impair : $\rho(A^p) = r^p$ et par la question 30 appliquée à A^p, r^p est l'unique valeur propre de module r^p de A^p, donc par stricte croissance de $x \mapsto x^p$, r est l'unique valeur propre de A de module r.
Si p est pair, on a toujours $\rho(A^p) = r^p$, et par la question 30 r^p est l'unique valeur propre de module r^p de A^p. Il faut montrer que $-r$ n'est pas valeur propre de A. Or comme A est diagonalisable, A^p aussi et :

$$\dim(\ker(A^p - r^p I_n)) = \dim(\ker(A - rI_n)) + \dim(\ker(A + rI_n)).$$

Par la question 29 on sait que la dimension de l'espace propre de gauche est 1, et celle de $\ker(A - rI_n)$ vaut également 1 par la question 32, donc nécessairement $\dim(\ker(A + rI_n)) = 0$ et $-r \notin \mathrm{Sp}(A)$. Donc r est l'unique valeur propre de module r de A.

34. Soit λ une valeur propre de A. On sait qu'il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Considérons les composantes de X non nulles. L'une d'entre elles est de module maximal. On la note i_0.
Alors on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_{i_0 j} x_j = \lambda x_{i_0}$ soit $\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} A_{i_0 j} x_j = (\lambda - A_{i_0 i_0}) x_{i_0}$
Et $\displaystyle|\lambda - A_{i_0 i_0}||x_{i_0}| \leqslant \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} |A_{i_0 j}||x_j|$.
On divise alors par $|x_{i_0}|$ non nul et $\dfrac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leqslant 1$ pour conclure.

35. Utilisons la proposition : le spectre de A est celui de $D^{-1}AD$. On applique alors la question 34 à la matrice $D^{-1}AD$: si $\lambda \in \mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(D^{-1}AD)$, il existe i entre 1 et n tel que :

$$\begin{aligned} |\lambda - A_{ii}| = |\lambda - X_i^{-1} A_{ii} X_i| \leqslant \sum_{j=1, j\neq i} X_i^{-1} |A_{ij}| X_j &\leqslant X_i^{-1} \sum_{j=1, j\neq i} B_{ij} X_j \\ &\leqslant X_i^{-1} (\rho(B) - B_{ii}) X_i \end{aligned}$$

Ce qui fournit l'inégalité demandée.

Fin de la correction
