
 Problème supplémentaire 5/2 n° 2

Dans ce problème, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou le corps \mathbb{C} et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul.

Si f est un endomorphisme de E , pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f , c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F .

Pour tout endomorphisme f d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E on définit la suite $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ des puissances de f par

$$\begin{cases} f^0 = \text{Id}_E, \\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \quad \text{pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel sur \mathbb{K} des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} et, pour tout n de \mathbb{N} , $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré au plus égal à n .

Pour $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices carrées à n lignes et à éléments dans \mathbb{K} et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices colonnes à n lignes et à éléments dans \mathbb{K} .

I - Première partie

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

1. a) Montrer qu'une droite F engendrée par un vecteur u est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f .
- b) On note ici $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et on considère l'endomorphisme g de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans \mathcal{B} est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer en en donnant une base les droites de \mathbb{R}^3 stables par g .

2. a) Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de E stables par f et donner un exemple d'un endomorphisme de \mathbb{R}^2 qui n'admet que deux sous-espaces stables.
- b) Montrer que si E est de dimension finie $n \geq 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.
Donner un exemple d'endomorphisme de \mathbb{R}^2 qui n'admet que trois sous-espaces stables.
3. a) Montrer que tout sous-espace engendré par une famille de vecteurs propres de f est stable par f .
Préciser l'endomorphisme induit par f sur tout sous-espace propre de f .
- b) Montrer que si f admet un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2 alors il existe une infinité de droites de E stables par f .
- c) Que dire de f si tous les sous-espaces de E sont stables par f ?
4. Dans cette question, E est un espace de dimension finie.
 - a) On suppose dans cette sous-question que f est inversible. Démontrer que si F est un sous-espace stable par f de E alors $f(F) = F$ puis que F est stable par f^{-1} .
 - b) Montrer que si f est diagonalisable alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire dans E stable par f .
On pourra partir d'une base de F et d'une base de E constituée de vecteurs propres de f .
 - c) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si tous les sous-espaces de E qui sont stables par f admettent un supplémentaire dans E qui est stable par f , alors f est diagonalisable.
On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E .
Qu'en est-il si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

II - Deuxième partie

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme diagonalisable d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n , qui admet p valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et, pour tout i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, on note E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i .

5. Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si $F =$

$$\bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i).$$

a) Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ est stable par f .

b) Soit F un sous-espace de E stable par f et x un vecteur non nul de F . Justifier l'existence et l'unicité de $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans $E_1 \times \dots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$.

c) Si on pose $H_x = \{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid x_i \neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres), on peut supposer que $H_x = \llbracket 1, r \rrbracket$ avec $1 \leq r \leq p$. Ainsi on a $x = \sum_{i=1}^r x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout i de $\llbracket 1, r \rrbracket$.

On pose $V_x = \text{vect}(x_1, \dots, x_r)$.

Montrer que $\mathcal{B}_x = (x_1, \dots, x_r)$ est une base de V_x .

d) Montrer que pour tout j de $\llbracket 1, r \rrbracket$, $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x et donner la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ dans la base \mathcal{B}_x .

e) Montrer que $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une base de V_x .

f) En déduire que pour tout i de $\llbracket 1, r \rrbracket$, x_i appartient à F et conclure.

6. Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où $p = n$.

a) Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.

b) Combien y a-t-il de droites de E stables par f ?

c) Si $n \geq 3$ et $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k et stables par f ?

d) Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas? Les donner tous.

III - Troisième partie

7. On considère l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$.

a) Vérifier que pour tout n de \mathbb{N} , $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D et donner la matrice A_n de l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

b) Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$, de dimension finie non nulle, stable par D .

i) Justifier l'existence d'un entier naturel n et d'un polynôme R de degré n tels que $R \in F$ et $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.

ii) Montrer que la famille $(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$ est une famille libre de F .

iii) En déduire que $F = \mathbb{K}_n[X]$.

c) Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D .

8. On considère un endomorphisme f d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

- a) Démontrer que l'ensemble des vecteurs u de E tels que la famille $\mathcal{B}_{f,u} = (f^{n-i}(u))_{1 \leq i \leq n}$ soit une base de E est exactement l'ensemble $E \setminus \ker f^{n-1}$.
- b) Dans le cas où $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de E , quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}_{f,u}$?
- c) Déterminer une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit A_{n-1} .
- d) Donner tous les sous-espaces de E stables par f . Combien y en a-t-il? Donner une relation simple entre ces sous-espaces stables et les noyaux $\ker(f^i)$ pour i dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

IV - Quatrième partie

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul, M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est l'endomorphisme de $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $f(X) = MX$ pour tout X de E .

9. Si on pose $X_i = \begin{pmatrix} \delta_{1,i} \\ \vdots \\ \delta_{n,i} \end{pmatrix}$ où $\delta_{k,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell, \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$ et $\mathcal{B}_n = (X_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de E , quelle est la matrice de f dans \mathcal{B}_n ?

10. Montrer que si n est impair, alors f admet au moins une valeur propre réelle.

11. Dans cette question, $\lambda = \alpha + i\beta$, avec (α, β) dans \mathbb{R}^2 , est une valeur propre non réelle de M et Z de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul est tel que $MZ = \lambda Z$.

Si $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on pose $\overline{M} = (m'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $m'_{i,j} = \overline{m_{i,j}}$ (conjugué du nombre complexe

$m_{i,j}$) pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ et si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, on pose $\overline{Z} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}$ avec $z'_i = \overline{z_i}$ pour tout i de

$\llbracket 1, n \rrbracket$.

On pose $X = \frac{1}{2}(Z + \overline{Z})$ et $Y = \frac{1}{2i}(Z - \overline{Z})$.

- a) Vérifier que X et Y sont dans E et montrer que la famille (X, Y) est libre dans E .
 - b) Montrer que le plan vectoriel F engendré par X et Y est stable par f et donner la matrice de f_F dans la base (X, Y) .
12. Que penser de l'affirmation : « tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie admet au moins une droite ou un plan stable »?
 13. Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ n'admettant ni droite ni plan stable?

V - Cinquième partie

Dans cette partie E est un espace vectoriel réel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On considère un endomorphisme f de E et on note A sa matrice dans la base \mathcal{B} .

14. a) Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur E pour lequel \mathcal{B} est orthonormée. Ce produit scalaire est noté de manière usuelle par $\langle u, v \rangle$ ou plus simplement $u \cdot v$ pour tout (u, v) de E^2 .
 - b) Si u et v sont représentés par les matrices colonnes respectives U et V dans la base \mathcal{B} , quelle relation simple existe-t-il entre $u \cdot v$ et le produit matriciel tUV (où tU est la transposée de U)?
15. Soit H un hyperplan de E et D son supplémentaire orthogonal.
- Si (u) est une base de D et si U est la matrice colonne de u dans \mathcal{B} , montrer que H est stable par f si et seulement si U est un vecteur propre de la transposée de A .

16. Déterminer ainsi le(s) plan(s) stable(s) de f lorsque $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

17. Dans cette question, E est un espace vectoriel réel de dimension n et f est un endomorphisme de E .
- a) Montrer que si f est diagonalisable alors il existe n hyperplans de E , $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$, tous stables par f , tels que $\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$.
- b) Un endomorphisme f de E pour lequel il existe n hyperplans de E stables par f et d'intersection réduite au vecteur nul est-il nécessairement diagonalisable ?

FIN DE L'ÉNONCÉ
