Le théorème spectral : deux démonstrations par le calcul différentiel
Une correction

Exercice 1 (Le théorème spectral I)

1. La fonction q est polynomiale donc de classe C^2 et on trouve rapidement que, pour $v \in \mathbb{R}^n$, $\nabla q(v) = 2^t(AX)$ où X est la colonne des coordonnées de m_0 dans la base canonique.
2. a) La fonction f est continue sur le compact S^{n-1} : elle admet donc un minimum global et un maximum global.

   b) L'image de c est incluse dans S^{n-1} et passe par v_0 qui est un point où f atteint un maximum global : ainsi $g = f \circ c$ admet en 0 un maximum global.

   c) • La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :
   $$g'(t) = \langle \nabla f(c(t)), c'(t) \rangle .$$
   D'après la question précédente on a donc $g'(0) = 0$ i.e. $\langle \nabla f(v_0), v_1 \rangle = 0$.

   • Le point précédent étant valable pour tout vecteur unitaire v_1 orthogonal à v_0 on en déduit que $\nabla f(v_0) \in \mathrm{vect}(v_0)$: v_0 est un vecteur propre de A
3. On procède par récurrence sur la dimension de l'espace...

Exercice 2 (Extrema liés et théorème spectral II)

1. • Si $\ker \alpha = \mathbb{R}^n$, alors $\alpha = 0$ et $\alpha = \lambda\beta$ avec $\lambda = 0$.

   • On suppose donc $\ker \alpha$ de dimension $n-1$ et par égalité des dimensions on a $\ker \alpha = \ker \beta$.
   On écrit $\mathbb{R}^n = \ker \alpha \oplus \mathrm{vect}(a)$ où a est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Pour x dans $\mathbb{R}^n$, on pose :
   $$h(x) = \alpha(a)\beta(x) - \beta(a)\alpha(x).$$
   h est une forme linéaire et pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ écrit $x = y + \mu a$ selon la somme directe $\mathbb{R}^n = \ker \alpha \oplus \mathrm{vect}(a)$ on a :
   $$h(x) = \mu\alpha(a)\beta(a) - \mu\beta(a)\alpha(a) = 0.$$
   Ainsi $\beta = \dfrac{\beta(a)}{\alpha(a)}\alpha$, correctement, puisque $\alpha(a) \neq 0$.

2. La fonction $h = t \mapsto \|\gamma(t)\|^2$ est de classe C^1 par composition et sa dérivée est donnée, pour $t \in]-1,1[$, par :
   $$h'(t) = \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle .$$
   Comme h est constante de valeur 1, il vient $\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle = 0$ pour tout t dans $]-1,1[$.

3. On pose, pour $t \in]-1,1[$: $\gamma(t) = \dfrac{m+tv}{\|m+tv\|}$.
   Cela est correct car pour tout $t \in]-1,1[$ on a, puisque m et v sont orthogonaux :
   $$\|m+tv\|^2 = \underbrace{\|m\|^2}_{=1} + t^2 \|v\|^2 > 0.$$
   La courbe γ est à valeurs dans S^{n-1} et vérifie $\gamma(0) = m$.
   Il reste à montrer que γ est de classe C^1 avec $\gamma'(0) = v$. Écrivons $m = (a_1, \ldots, a_n)$ et $v = (x_1, \ldots, x_n)$. On a alors, pour $t \in]-1,1[$:
   $$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + tx_i)^2}} \big(a_1 + tx_1, \ldots, a_n + tx_n\big).$$

Ainsi, γ est de classe C^1 par composantes.
Puis si on a $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} \underset{u\to 0}{=} 1 - \dfrac{u}{2} + o(u)$. De là :

$$\frac{1}{\|m+tv\|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2\|v\|^2}} \underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{t^2}{2}\|v\|^2 + o(t^2) = 1 + o(t^2).$$

De là, $\gamma(t) \underset{t\to 0}{=} (m+tv)(1+o(t))$, donc :

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{t} \underset{t\to 0\cdot}{=} v + \vec{o}(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} v.$$

Remarque : on pouvait (en tâtonnant un peu) introduire

$$\gamma : t \mapsto \cos(\|v\|\, t)m \,+\, \sin(\|v\|\, t)\frac{v}{\|v\|}$$

et vérifier que les conditions demandées sont réunies.

4. a. g est continue sur le compact S^{n-1} : elle admet donc un minimum et un maximum.

   b. On suppose que g admet en m un extremum relatif. Soit $\gamma :]-1,1[\to \mathbb{R}^n$ telle qu'à la question 3. On considère l'application $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $h = g \circ \gamma$.
   Cette application est de classe C^1 et sa dérivée est donnée, pour $t \in]-1,1[$, par :

$$h'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,.$$

   Comme h admet en 0 un extremum relatif, on a $h'(0) = 0$, donc $\langle \nabla f(m), v\rangle = 0$. Il en résulte que $v \in \nabla f(m)^\perp$ qui est le noyau de la différentielle df_m. Mais ceci est vrai quelque soit le choix de v dans $m^\perp$, donc $m^\perp \subset \ker df_m$. Mais $m^\perp$ est le noyau de la forme linéaire $w \mapsto \langle m, w\rangle$: selon la question 1, il existe λ réel tel que, pour tout $w \in \mathbb{R}^n$:

$$df_m(w) = \lambda \langle m, w\rangle \,.$$

   Il en résulte que, pour tout $w \in \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(m) - \lambda m, w\rangle = 0$, donc $\nabla f(m) - \lambda m \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$.

5. a. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} x_i x_j,$$

   de sorte que : $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} dx_i dx_j$.
   La fonction f étant polynomiale, elle est de classe C^1, et, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} &= \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} \underbrace{\frac{\partial(dx_i dx_j)}{\partial x_k}} = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} \delta_i^k dx_j + \delta_j^k dx_i \\ &= \sum_{j=1}^n a_{k,j} dx_j + \sum_{i=1}^n a_{i,k} dx_i = 2 \sum_{i=1}^n a_{i,k} dx_i \end{aligned}$$

   On a bien $\nabla f(x) = 2Ax$.

   b. On a vu que g admet sur S^{n-1} un maximum et un minimum. Soit x un point de S^{n-1} où g admet un extremum. D'après la question 4., il existe λ réel tel que :

$$\nabla f(x) = \lambda x.$$

   Ainsi $Ax = \dfrac{\lambda}{2} x$ et comme x est non nul, c'est un vecteur propre de A. □