Le théorème spectral : deux démonstrations par le calcul différentiel

Exercice 1 (Le théorème spectral I)

Cet exercice est dû à Arnaud de Saint-Julien

Soient $n \geq 2$ entier, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et f la forme quadratique canoniquement associée à A i.e. pour $x \in \mathbb{R}^n$, $q(x) = {}^tXAX$ où X est la colonne des coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Démontrer que q est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle au point courant m de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit S^{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
 - a) Justifier que la restriction f de q à S^{n-1} admet un maximum global en un point v_0 de S^{n-1} .
 - b) Soient v_1 un vecteur orthogonal à v_0 de norme 1 et $c : \mathbb{R} \rightarrow S^{n-1}$ défini pour t réel par :

$$c(t) = (\cos t)v_0 + (\sin t)v_1.$$

Justifier que $g = f \circ c$ admet un maximum global en 0.

- c) Démontrer que A admet une valeur propre réelle.
3. Démontrer le théorème spectral : *tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable en base orthonormée.*

Exercice 2 (Extrema liés et théorème spectral II)

Soit $n \geq 1$ est entier naturel. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme associée est notée $\| \cdot \|$. La sphère unité de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire l'ensemble des vecteurs v de $\mathbb{R}^n$ tels que $\|v\| = 1$, est notée S^{n-1} .

1. Soient α et β deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $\ker \beta \subset \ker \alpha$. Démontrer qu'il existe λ réel vérifiant : $\alpha = \lambda\beta$.
2. Soit $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que pour tout t dans $] - 1, 1[$ on ait :

$$\|\gamma(t)\| = 1.$$

Démontrer que, pour tout t dans $] - 1, 1[$, on a : $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$.

3. Soit $m \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|m\| = 1$ et soit $v \in \mathbb{R}^n$, non nul, orthogonal à m . Démontrer qu'il existe une application $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1 , telle que $\gamma(0) = m$, $\gamma'(0) = v$ et, pour tout t dans $] - 1, 1[$, on ait

$$\|\gamma(t)\| = 1.$$

4. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et g sa restriction à S^{n-1} .
 - a. Justifier que g admet des extrema globaux sur S^{n-1} .
 - b. En considérant une application $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ telle qu'à la question précédente, démontrer que, si g admet en m un extremum relatif, alors il existe λ réel vérifiant :

$$\nabla f(m) = \lambda m.$$

5. Soit A une matrice symétrique réelle, que l'on confond avec l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle.$$

- a. Démontrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) = 2Ax$.
- b. Soit x un extremum de g , restriction de f à S^{n-1} . Démontrer que x est un vecteur propre de A .