Un problème sur les séries trigonométriques, une correction

Partie 1 : exemples

1. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x réel on a : $\left| \frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$.

Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $p \geq 2$ entier, e^{ix}/p est de module < 1 et que donc (somme géométrique)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{p} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p - e^{ix}}$$

En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2 - p \cos(x)}{p^2 - 2p \cos(x) + 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{p^n} = \frac{p \sin(x)}{p^2 - 2p \cos(x) + 1}$$

Ainsi en regardant ce qu'il se passe pour $p = 2$ et $p = 3$ il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right) = \frac{4 - 2 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} + \frac{3 \sin(x)}{10 - 6 \cos(x)}$$

2. Soit x réel. On a $\exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$. Or, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x)) \exp(i \sin(x))$ et la partie réelle de cette quantité est

$$\exp(\cos(x)) \cos(\sin(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}.$$

3. Posons pour $n \in \mathbb{N}$ et x réel : $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $u_n(x) = a_n \cos(nx)$. Cette suite (a_n) est de limite nulle mais $u_n(0) = \frac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. La série de fonctions $\sum (u_n)$ n'est donc pas simplement convergente sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle ne converge pas en 0 (notamment).
4. La norme infinie sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est immédiatement égale à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. La série de fonction proposée n'est donc pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x réel on a : $|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$.

Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions proposée est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

6. Soit x réel. En notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les vecteurs $U = (a, b)$ et $V = (\cos x, \sin x)$ donne : $|\langle U, V \rangle| \leq \|U\| \|V\|$ i.e.

$$|a \cos x + b \sin x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

De plus, il y a un cas d'égalité. En effet :

- c'est immédiat si $a = b = 0$ (n'importe quel x convient) ;
- si $(a, b) \neq (0, 0)$, $(a/\sqrt{a^2 + b^2}, b/\sqrt{a^2 + b^2})$ est un vecteur normé et il existe donc un x tel que ce vecteur soit $(\cos(x), \sin(x))$.

7. Posons, pour x réel et n entier naturel : $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. On suppose ici que la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, avec la question précédente

$$\|u_n\|_\infty = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \max(|a_n|, |b_n|)$$

Par domination, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.

Autres propriétés

8. La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et cette dernière conserve la continuité. Les fonctions de la série étant continues sur $\mathbb{R}$, il en est de même de f .
La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence simple sur $\mathbb{R}$. La convergence simple conserva la 2π -périodicité (si $S_n(x + 2\pi) = S_n(x)$, on peut passer à la limite pour obtenir la 2π -périodicité de la limite). Ici, f est donc 2π -périodique et $f \in C_{2\pi}$.
9. Soit $n \geq 1$ entier. Pour x réel on a $\cos^2(nx) = \frac{1}{2}(\cos(2nx) + 1)$ et ainsi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \left[\frac{1}{4n} \sin(2nx) + \frac{x}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

De même, si $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $\sin(kx) \cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(kx + nx) + \sin(kx - nx))$ et comme $\sin(px)$ est d'intégrale nulle sur $[-\pi, \pi]$, on en déduit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx = 0$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kx) \cos(nx) + b_k \sin(kx) \cos(nx)) dx$$

Posons encore pour $k \in \mathbb{N}$ et x réel : $u_k(x) = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ d'où $|u_k(x) \cos(nx)| \leq |u_k(x)| \leq \|u_k\|_\infty$. Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente (par l'hypothèse de normale convergence). la série de fonction $\sum u_k$ **converge normalement sur le segment** $[-\pi, \pi]$ et on peut intervertir les symboles *somme* et *intégrale* :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx \right)$$

Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n$ qui vaut $a_n \pi$ si $n \neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n = 0$. Ainsi, si $n \neq 0$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0(f)$.

11. Avec la question précédente en prenant $a_0 = \alpha_0(f)/2$, $b_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $b_n = \beta_n(f)$, la somme est ici étant égale à g et on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n(f) = \alpha_n(g) \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \beta_n(g)$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. $h \mapsto \alpha_n(h)$ et $h \mapsto \beta_n(h)$ sont des fonctions linéaire, donc $\alpha_n(g - f) = \beta_n(g - f) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec le résultat admis, il vient $g - f = 0$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est paire, $x \mapsto f(x) \sin(nx)$ est impaire et sa fonction est donc d'intégrale nulle sur un intervalle centré sur 0 (ce que l'on voit par le changement de variable affine $t = -x$). En particulier, on a $\beta_n(f) = 0$. Puis $x \mapsto f(x) \cos(nx)$ est paire et donc $\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$

14. a) La fonction f étant paire, les coefficients $\beta_n(f)$ sont tous nuls. De plus

$$\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

Une double intégration par parties donne, pour $n \neq 0$,

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = -\frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = -\frac{2}{n} \left(\left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right)$$

et ainsi $\alpha_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$.

On a aussi $\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$

b) Comme les séries $\sum \alpha_n(f)$ et $\sum \beta_n(f)$ convergent absolument, on peut utiliser ce qui précède et conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx),$$

et la série de fonctions en jeu converge normalement sur $\mathbb{R}$.

c) Pour $x = 0$, on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Pour $x = \pi$, on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ On découpe la somme en isolant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair (c'est licite, via le théorème de convergence commutative, car la série est absolument convergente :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

On en déduit que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

15. Application.

- La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0, 1[$. En 0, la fonction est équivalente à $\frac{x}{x} = 1$ et est donc prolongeable par continuité. Notre fonction est donc intégrable sur $[0, 1]$ (ce n'est même pas une intégrale impropre).

- Utilisons le DSE en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\forall x \in]0, 1[, \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} dx$$

On veut intervertir somme et intégrale. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme.

- $g_n : x \mapsto (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$ est le terme général d'une série de fonctions continue qui converge simplement sur $]0, 1[$ vers $g : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.
- la fonction g est continue sur $]0, 1[$.
- g_n est intégrable sur $]0, 1[$ et $\int_0^1 |g_n(x)| dx = \frac{1}{n^2}$ est le terme générale d'une série convergente.

L'interversion est licite et donne

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Commentaire. Le premier point est inutile, puisque dans la conclusion du théorème d'intégration terme à terme on a l'intégrabilité de g sur $]0, 1[$.

16. a) Dans l'exemple de la question 14b, on a obtenu une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Cependant la somme f n'est pas dérivable. En effet, f est dérivable à droite et gauche en π avec des nombres dérivés 2π (à gauche) et -2π (à droite).

b) Supposons que les séries $\sum (na_n)$ et $\sum (nb_n)$ sont absolument convergentes. Montrons qu'alors en posant $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, $\sum (u_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On utilise pour cela le théorème de régularité des sommes de séries fonctions.

— $\forall n, u_n \in C^1(\mathbb{R})$ et $u'_n(x) = -na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)$.

- $\sum (u_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- $\|u'_n\|_\infty \leq |na_n| + |nb_n|$ est le terme général d'une série convergente et $\sum (u'_n)$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique donc et indique non seulement que la somme est de classe C^1 mais que sa dérivée est la somme de la série dérivée.

17. On a vu à la question 1 que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{3 \sin(x)}{10 - 6 \cos(x)}$$

On est dans le cadre de la condition précédente avec $a_n = 0$ et $b_n = 1/3^n$. On en déduit (en dérivant) que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cos(nx)}{3^n} = \frac{3}{2} \frac{5 \cos(x) - 3}{(5 - 3 \cos(x))^2}$$

Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \frac{n}{3^n} \cos(nx)$.