

Endomorphismes de rang 1, niveau CCP

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geq 2$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles

à une colonne et n lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors tA désigne la matrice transposée de A .

Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors tV désigne la matrice transposée de V .

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, alors le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j de A est notée $a_{i,j}$, la matrice A est notée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice colonne V est notée $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

constituée des coefficients de la colonne numéro j de A . Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$.

Partie I : Un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0 {}^tV_0$.

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.
2. a. Calculer $A_0 U_0$.
b. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
c. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

Partie II : Une caractérisation des matrices de rang 1

3. Soient $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
a. Justifier : $U {}^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les coefficients de $U {}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V .
b. Exprimer $\text{tr}(U {}^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V .
c. Quel est le rang de $U {}^tV$?
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
a. Montrer qu'il existe $j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant :
$$C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A).$$

b. En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U {}^tV$.
5. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Partie III : Une application en probabilités

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose de plus : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

On note, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = P((X = i) \cap (Y = j))$, puis

$M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $U_X = (P(X = i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $U_Y = (P(Y = i))_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

6. On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Calculer $U_X^t U_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.

7. On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1.

a. Montrer : $C_1(M) + \dots + C_n(M) = U_X$.

b. En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.

c. Montrer : $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(Y = j) = \beta_j$.

d. En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Partie IV : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

telles que $A = U^t V$ et on note $a = \text{tr}(A)$.

8. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

9. Montrer : ${}^t V U = (a)$, puis : $A^2 = aA$.

10. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

11. On suppose $a \neq 0$. Calculer AU . Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

12. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Partie V : Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique

13. Montrer que l'application : $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle = \text{tr}({}^t M N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit dorénavant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de ce produit scalaire.

On considère une matrice colonne $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{j=1}^n v_j^2 = 1$. On note $S = V^t V$.

14. Montrer que S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $S^2 = S$.

15. a. Montrer que l'application $\Phi : M \mapsto SM$ est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Vérifier que $\Phi^2 = \Phi$. Que peut-on dire des valeurs propres de Φ ?

c. On note e l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(\Phi)$ et $\text{Ker}(\Phi - e)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

FIN DE L'ÉNONCÉ
