Méthode du gradient, lagrangien et algorithme d'Uwaza
Une correction.

Partie 1

Résultats préliminaires

1. Dans la suite on notera $\overrightarrow{x}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont la matrice colonne x dans la base canonique. Soit u l'endomorphisme canoniquement attaché à M. Comme M est symétrique réelle, u est orthodiagonalisable dans une base notée $\mathcal{B}$ en la matrice $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Notons (y_i) les composantes de $\overrightarrow{x}$ sur la base $\mathcal{B}$. Il vient alors $\big(Mx|x\big) = \big(u(\overrightarrow{x})|\overrightarrow{x}\big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = ||\overrightarrow{x}||^2 = ||x||^2$.
   Il en découle que, pour tout vecteur x, $p||x||^2 \leqslant (Mx|x) \leqslant q||x||^2$ avec $p = \inf_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i$ et $q = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i$. Remarquons que cette égalité est la meilleure possible d'une manière générale car les deux égalités sont atteintes en prenant pour x un vecteur propre relatif à la plus petite ou à la plus grande des valeurs propres.

2. Avec les notations précédentes, on a vu que $(Mx|x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. Il en découle immédiatement que M est définie positive c'est à dire positive inversible si et seulement si $\lambda_i > 0$ pour tout i

3. Toujours avec les notations précédentes en supposant pour fixer les idées que $|\lambda_n| = \max |\lambda_i|$, si x est un vecteur unitaire, il vient que $||Mx||^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i y_i)^2 \leqslant \lambda_n^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_n^2$ donc $N(M) \leqslant |\lambda_n|$ par définition même du sup.
   En outre si x est le vecteur unitaire de composantes toutes nulles sur la base $\mathcal{B}$ sauf la dernière égale à 1, il vient que $||Mx||^2 = \lambda_n^2$ donc $N(M) \geqslant |\lambda_n|$. En conclusion, $N(M) = \displaystyle\sup_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|$.

Etude de la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$

4. Notons $S = I - \alpha A$. C'est une matrice évidemment symétrique dont les valeurs propres sont les $1 - \alpha\lambda_i$. Or, comme $\lambda_i > 0$, il vient que $0 < \alpha\lambda_i < 2\frac{\lambda_i}{\lambda_n} \leqslant 2$ donc $-1 \leqslant 1 - 2\frac{\lambda_i}{\lambda_n} < 1 - \alpha\lambda_i < 1$. Ainsi toutes les valeurs propres de S sont dans l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ de sorte que $N(S) < 1$ d'après la question précédente. En notant z la solution de $Ax = b$, en remarquant que la suite (x^k) est définie par l'itération affine $x^{k+1} = Sx^k + \alpha b$ dont z est solution, il vient que $x^{k+1} - z = S(x^k - z)$ donc $||x^{k+1} - z|| \leqslant N(S)||x^k - z|| \leqslant \cdots \leqslant N(S)^{k+1}||x^0 - z||$ ce qui prouve bien que la suite (x^k) converge vers z puisque $N(S) < 1$.

Minimum de f

5. Un développement immédiat, joint au fait que A est symétrique et donc que $(Ax|u) = (Au|x)$, fournit :

$$f(x+u) - f(x) = \tfrac{1}{2}(Au|u) - (b|u) + (Ax|u) = f(u) + (Ax|u)$$

6. Il est immédiat que $f(x)$ est une expression polynomiale de degré 2 des composantes canoniques de x et donc que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.
7. • Pour le calcul des dérivées partielles, notons que $f(x+he_k)-f(x) = \frac{1}{2}(Ahe_k|he_k) - (b|he_k) + (Ax|he_k)$. Donc $\frac{1}{h}\Bigg(f(x+he_k)-f(x)\Bigg) = \frac{h}{2}(Ae_k|e_k) - (b|e_k) + (Ax|e_k)$.

   Il en découle que $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = (Ax-b|e_k)$.

   • La base canonique étant orthonormée pour le produit scalaire canonique (!), il résulte immédiatement de la question précédente que $\nabla f(x) = Ax - b$.
8. Un développement immédiat montre, compte tenu des questions 5 et 6, que $I(x,u) = \frac{1}{2}(Au|u)$ qui ne dépend donc pas de x. D'après la première question, $r||u||^2 \leqslant I(x,u) \leqslant s||u||^2$ avec $s = \frac{1}{2}\lambda_1 = \frac{1}{2}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i$ et $s = \frac{1}{2}\lambda_n = \frac{1}{2}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i$.
9. Si f admet un minimum en z alors z est un point critique puisque f est C^1 et $\mathbb{R}^n$ ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Il en découle que $\nabla f(x) = 0$ c'est à dire que $Az = b$.

   Réciproquement si $Az = b$ alors alors $I(z,u) = f(z+u) - f(z)$ puisque $\nabla f(x) = 0$. De la question précédente on en déduit que $f(z+u)-f(z) \geqslant \frac{\lambda_1}{2}$ et donc que f admet un minimum en z puisque $\lambda_1 > 0$ car A est définie positive.

   Conclusion. f admet un unique minimum en la solution z du système $Az = b$.

Recherche du minimum de f :

10. Nous avons $f(x+u) - f(x) = I(x,u) + (g(x)|u)$ donc :

$$\begin{aligned} f(x-\alpha g(x)) - f(x) &= I(x, -\alpha g(x)) - \alpha(g(x)|g(x)) \\ &\leqslant \tfrac{\lambda_n}{2}\alpha^2||g(x)||^2 - \alpha||g(x)||^2 = \alpha\Big(\tfrac{\lambda_n}{2}\alpha - 1\Big)||g(x)||^2 \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

   compte-tenu du fait que $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$.

   Conclusion. $f\big(x - \alpha g(x)\big) \leqslant f(x)$ pour tout vecteur x dès lors que $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$.
11. Partant d'une semence x^0 quelconque dans $\mathbb{R}^n$, le résultat précédent nous incite à envisager la suite itérée définie par $x^{k+1} = x^k - \alpha g(x^k)$. c'est à dire par $x^{k+1} = x^k + \alpha\big(b - Ax^k\big)$ compte-tenu de la question 6.

   Ainsi cette « nouvelle »méthode n'est autre que celle définie dans la question 4 qui converge on le sait vers la solution z du système $Ax = b$

Partie 2

Existence du minimum de la fonction f dans F :

12. On a $f(x) = \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x) \geqslant \frac{1}{2}(Ax|x) - \big|(b|x)\big| \geqslant \frac{\lambda_1}{2}||x||^2 - ||b||.||x||$ d'après la question 1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il en résulte que $\lim\limits_{||x||\to+\infty} f(x) = +\infty$ puisque $\lambda_1 > 0$.

    Conclusion. Pour tout réel c, il existe un réel ρ tel que, pour tout vecteur x de F tel que $\|x\| \geqslant \rho$ alors $f(x) \geqslant c$.
13. Il suffit d'appliquer la question précédente avec $c = f(y)$.

14. Soit y_0 fixé quelconque dans F. D'après la question précédente, il existe $r > 0$ tel que pour $x \in F$ et $||x|| \geqslant r$ on ait $f(x) \geqslant f(y_0)$. Il en découle que $\inf_{x \in F} f(x) = \inf_{x \in K} f(x)$ où $K = F \cap \overline{B}(0,r)$. Or K est un fermé borné donc cet inf est atteint puisque f étant de classe C^1 comme noté précédemment est a fortiori continue.

15. • Montrons que f est strictement convexe. Dans une base orthonormée de vecteurs propres de A, $f(x)$ s'écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{2} x_i^2 - b_i x_i$. Pour prouver que f est strictement convexe, il suffit clairement de prouver que les fonctions $\varphi_i(t) = \frac{\lambda_i}{2} t^2 - b_i t$ sont strictement convexes sur $\mathbb{R}$ ce qui est clair car $\varphi_i''(t) = \lambda_i > 0$.

    • Montrons que f atteint son minimum sur F en un seul point. Si ce minimum, que l'on sait déjà atteint, est atteint en x_1 et x_2 différents, on aurait par convexité stricte $f(x) < f(x_1)$ pour tout x appartenant au segment ouvert $]x_1, x_2[$ bien inclus dans F ce qui est contradiction avec le fait que le minimum de f sur F soit atteint en x_1.

Propriétés du point $\overline{x}$:

16. Notons que f atteint son minimum en y si et seulement si $\Delta(u) = f(y+u) - f(y) \geqslant 0$ pour tout $u \in F$ c'est à dire si et seulement si $\Delta(u) = I(y,u) + \big(g(y)|u\big) = \frac{1}{2}(Au|u) + \big((Ay-b)|u\big) \geqslant 0$ pour tout $u \in F$.
    Si $Ay - b$ est orthogonal à F l'inégalité est bien vérifiée car A est positive. Donc le minimum sur F de f est bien atteint en y.
    Réciproquement si le minimum est atteint en y alors $\Delta(u) \geqslant 0$ pour tout u de F. Supposons qu'il existe $u_0 \in F$ tel que $\big((Ay - b|u_0\big)$ soit non nul. Quitte à changer u_0 en son opposé (qui appartient bien encore à F), on peut supposer $\big((Ay - b|u_0\big) < 0$. Comme $\Delta(u) \geqslant 0$ pour tout $u \in F$, on a en particulier $\Delta(\alpha u_0) \geqslant 0$ pour tout $\alpha > 0$. Or $\Delta(\alpha u_0) = \frac{1}{2}(Au_0|u_0).\alpha^2 + (b|u_0).\alpha \sim (b|u_0).\alpha < 0$ lorsque $\alpha \to 0^+$. Contradiction.

    Conclusion. f atteint son minimum sur F en l'unique point $\overline{x}$ tel que $A\overline{x} - b$ soit orthogonal à F.

17. Comme $A\overline{x} - b$ est orthogonal à F, on en particulier $\big((A\overline{x} - b)|\overline{x}\big) = 0$ donc $(A\overline{x}|\overline{x}) = (b|\overline{x})$ de sorte que :
$$f(\overline{x}) = \tfrac{1}{2}\big((A\overline{x})|\overline{x}) - (b|\overline{x}) = -\tfrac{1}{2}(A\overline{x}|\overline{x}) = -\tfrac{1}{2}(b|\overline{x})$$

Propriétés du Lagrangien et de ses points selles

18. Commençons par remarquer que pour $x \notin F = \ker B$ on a $\sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x,y) = f(x) + \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (y|Bx) = +\infty$ clairement comme on le voit en considérant $y = \alpha.Bx$ avec $\alpha \to +\infty$.
    Par contre pour $x \in F$ on a $L(x,y) = f(x)$ donc $\sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x,y) = f(x)$.
    Ainsi $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \Big(\sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x,y)\Big) = \inf_{x \in F} f(x) = f(\overline{x})$.
    Pour établir l'inégalité demandée, il suffit donc d'établir, par définition même du sup, que $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y_0) \leqslant f(\overline{x})$ pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$.
    Or $L(\overline{x}, y_0) = f(\overline{x})$ puisque $\overline{x} \in F$. Donc $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x,y) \leqslant f(\overline{x})$.
    Conclusion. $\displaystyle\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left(\inf_{x \in R^n} L(x,y)\right) \leqslant \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x,y)\right)$.

19. Soit (x^*, y^*) un point selle du Lagrangien (que l'on suppose exister). D'après la définition d'un point selle et des bornes supérieures et inférieures, il vient $\sup_{y \in \mathbb{R}^n} L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*) \leqslant \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y^*)$ donc a fortiori :

$\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^n} L(x,y)\right) \leqslant L(x^*,y^*) \leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,y)\right)$ d'où l'égalité cherchée compte tenu de la question 18.

Čomte-tenu en outre du fait (voir question 18) que $\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^n} L(x,y)\right) = f(\overline{x})$

Conclusion. Si (x^*,y^*) est un point selle alors

$$L(x^*,y^*) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\inf_{x\in R^n} L(x,y)\right) = \inf_{x\in R^n}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^n} L(x,y)\right)$$

20. $\bullet$On a $L(x_1,y) \leqslant L(x_1,y_1)$ pour tout y de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\sup_{y\in\mathbb{R}^n} L(x_1,y) \leqslant L(x_1,y_1)$. Or on a noté dans la question 18 que $\sup_{y\in\mathbb{R}^n} L(x_1,y)$ vaut $+\infty$ si $x_1 \notin F$ et vaut $f(x_1) = L(x_1,y_1)$ si $x_1 \in F$.

    Ainsi $\left(L(x_1,y) \leqslant L(x_1,y_1)\ \forall y \in \mathbb{R}^n\right) <=> \left(Bx_1 = 0\right)$ (et alors $L(x_1,y) = f(x_1)\ \forall y \in \mathbb{R}^n$)

    $\bullet$Puis on a : $\left(L(x_1,y_1) \leqslant L(x,y_1)\ \forall x \in \mathbb{R}^n\right) <=> \left(L(x_1,y_1) \leqslant L(x_1+u,y_1)\ \forall u \in \mathbb{R}^n\right)$

    $$<=> \left(f(x_1) \leqslant f(x_1+u) + (y_1|Bu)\ \forall u \in \mathbb{R}^n\right)$$

    $$<=> \left((Ax_1 - b|u) + \tfrac{1}{2}(Au|u) + (y_1|Bu) \geqslant 0\ \forall u \in \mathbb{R}^n\right)$$

    (questions 7 et 8)

    $<=> \left((X_1|u) + \frac{1}{2}(Au|u) \geqslant 0\ \forall u \in \mathbb{R}^n\right)$ avec $X_1 = Ax_1 + {}^tBy_1 - b$

    Si $X_1 = 0$ l'inégalité est bien satisfaite puisque A est positive.

    Réciproquement si $X_1 \neq 0$ elle n'est pas satisfaite car avec $u = -\alpha X_1$ avec $\alpha > 0$ on a lorsque $\alpha \to 0^+$:

    $$(X_1|u) + \tfrac{1}{2}(Au|u) = -\alpha||X_1||^2 + \tfrac{\alpha^2}{2}(AX_1|X_1) \sim -\alpha||X_1||^2 < 0$$

    Conclusion. $\left(L(x_1,y_1) \leqslant L(x,y_1)\ \forall x \in \mathbb{R}^n\right) <=> \left(Ax_1 + {}^tBy_1 = b\right)$

21. Si $x_1 = \overline{x}$ (ce qui implique que $x_1 \in F$) et $Ax_1 + {}^tBy_1 = b$ alors les deux inégalités de la question précédente sont satisfaites ce qui signifie exactement que (x_1,y_1) est un point selle. Réciproquement si (x_1,y_1) est un point selle alors, d'après la question précédente, on a $x_1 \in F$ et $Ax_1 + {}^tBy_1 = b$. En outre d'après la question 19 on a $L(x_1,y_1) = f(\overline{x})$ mais aussi $L(x_1,y_1) = f(x_1)$ puisque $x_1 \in F$. Ainsi $x_1 = \overline{x}$ d'après l'unicité du point x de F minimisant $f(x)$.

    Conclusion. (x_1,y_1) est un point selle si et ssi $x_1 = \overline{x}$ et $Ax_1 + {}^tBy_1 = b$.

Algorithme d'Uzawa

22. Remarque liminaire : Pour y fixé quelconque dans $\mathbb{R}^n$, la seconde équivalence de la question 20 prouve que la fonction $x \mapsto L(x,y)$ atteint son minimum en la solution du système $Ax = b - {}^tBy$.

En particulier x^0 est bien défini par $Ax^0 = b - {}^tBy^0$, puis y^1 par $y^1 = y^0 + \rho_0 Bx^0$, puis x^1 par $Ax^1 = b - {}^tBy^1$ puis y_2 ...Etant donnée une suite $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ les deux suites $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(y^m)_{m\in\mathbb{N}}$ sont parfaitement définies.

Comme noté ci-dessus, on a $Ax^m = b - {}^tBy^m$. Par ailleurs $Ax^* = b - {}^tBy^*$ d'après la question 21. Donc

$$A(x^m - x^*) + {}^tB(y^m - y^*) = 0 \quad (\clubsuit)$$

Comme $x^* = \overline{x} \in F$ on a $Bx^* = 0$ et de $y^{m+1} = y^m + \rho_m Bx^m$ on tire :

$$y^{m+1} - y^* = y^m - y^* + \rho_m B(x^m - x^*) \qquad (\clubsuit\clubsuit)$$

23. Nous avons $\big((y^m - y^*)|B(x^m - x^*)\big) = \big({}^tB(y^m - y^*)|(x^m - x^*)\big) = -\big(A(x^m - x^*)|(x^m - x^*)\big)$ d'après $(\clubsuit)$. En élevant $(\clubsuit\clubsuit)$ au carré on obtient alors

$$\|y^{m+1} - y^*\|^2 = \|y^m - y^*\|^2 - 2\rho_m(A(x^m - x^*)|(x^m - x^*)) + (\rho_m)^2\|B(x^m - x^*)\|^2$$

Convergence de la suite numérique de terme général $\|y^m - y^*\|^2$

24. Il existe P orthogonale telle que $A = PD{}^tP$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors $P\Delta{}^tP$ avec $\Delta = (\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ convient clairement : en effet elle est bien symétrique et comme ses valeurs propres sont strictement positives, elle est définie positive.

   On a d'ailleurs déjà démontrer l'unicité de cette solution en devoir mais c'est moins simple.

25. • Notons $M = B.A^{-\frac{1}{2}}$. La matrice $A^{-\frac{1}{2}} = P.\Delta^{-1}.{}^tP$ étant symétrique, il en découle que ${}^tM = A^{-\frac{1}{2}}.{}^tB$. Ainsi $C = {}^tM.M$ est symétrique positive classiquement.

   • Il en découle d'après la question 1 que $(Cx|x) \leqslant \nu||x||^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ avec ν plus grande des valeurs propres de C.

   Or $(Cx|x) = ||BA^{-\frac{1}{2}}x||^2$. Pour $x = A^{\frac{1}{2}}u$ l'inégalité ci-dessus s'écrit donc $||Bu||^2 \leqslant \nu||A^{\frac{1}{2}}u||^2$. Par ailleurs $||A^{\frac{1}{2}}u||^2 = (A^{\frac{1}{2}}u|A^{\frac{1}{2}}u) = (Au|u)$ car $A^{\frac{1}{2}}$ est symétrique et $A^{\frac{1}{2}}.A^{\frac{1}{2}} = A$.

   Conclusion. $||Bu||^2 \leqslant \nu(Au|u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ avec ν plus grande des valeurs propres de C.

26. Posons pour m entier naturel : $a^m = ||y^m - y^*||^2$ et $u^m = x^m - x^*$. D'après la question 23, il vient :

$$a^{m+1} - a^m = -\rho_m\Big(2(Au^m|u^m) - \rho_m||Bu^m||^2\Big)$$

   Or $2(Au^m|u^m) - \rho_m||Bu^m||^2 \geqslant 2(Au^m|u^m) - \rho_m\nu(Au^m|u^m) = (2 - \nu\rho_m)(Au^m|u^m) \geqslant 0$ car $\nu\rho_m < 2$ et A positive.

   Ainsi $a^{m+1} - a^m \leqslant 0$ car en outre $\rho_m \geqslant 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

27. Ainsi la suite $(a^m)_{m\in\mathbb{N}}$ positive décroissante converge dans $\mathbb{R}$ et par passage à la limite dans l'égalité de la question 23 et en utilisant le fait que $0 < \alpha \leqslant \rho_m$ il vient que

$$\lim_{m\to+\infty} 2(Au^m|u^m) - \rho_m||Bu^m||^2 = 0$$

   Ǒr dans la question précédente on a établi l'inégalité $0 \leqslant (2 - \nu\rho_m)(Au^m|u^m) \leqslant 2(Au^m|u^m) - \rho_m||Bu^m||^2$.

   P̌ar sandwich on en déduit que $\lim\limits_{m\to+\infty} (2 - \nu\rho_m)(Au^m|u^m) = 0$.

   Or $2 - \nu\rho_m \geqslant 2 - \nu\beta > 0$ donc $(Au^m|u^m)$ converge vers 0.

   Comme $0 \leqslant ||u^m||^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1}(Au^m|u^m)$ on en déduit que $\lim\limits_{m\to+\infty} u^m = 0$ c'est à dire que $\lim\limits_{m\to+\infty} x^m = x^*$.

FIN DE LA CORRECTION
