La formule de Stirling, niveau CCP

1. a. On $I_0 = \frac{\pi}{2}$, et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

   b. Soit n entier naturel. Pour tout x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ on a $\cos x \in [0,1]$ et ainsi $(\cos x)^{n+1} \leqslant (\cos x)^n$. Comme $0 \leqslant \frac{\pi}{2}$ il vient par croissance de l'intégrale :

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n\,\mathrm{d}x$$

   ce qui démontre que $I_{n+1} \leqslant I_n$. Ceci étant valable pour tout n entier naturel on peut conclure que $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

   c. On utilise une intégration par partie :

   $$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{n+2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sin}{dx}(x)\cos(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\sin(x)\cos(x)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2\cos(x)^n\,\mathrm{d}x \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(x)^2)\cos(x)^n\,\mathrm{d}x = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

   D'où $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ donc $\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n}$.

   d. • La propriété $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$ pour p dans $\mathbb{N}$ se démontre facilement par récurrence sur p, en utilisant la relation : $I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}I_{2p}$.

   • De manière similaire, on démontre que $\boxed{I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}$.

2. a. • Soit $n \geqslant 2$. On a vu que la suite (I_n) est décroissante, donc on a

   $$I_n \leqslant I_{n-1} \leqslant I_{n-2}$$

   Mais $I_n > 0$ donc $1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n-2}}{I_n}$.
   De plus on a vu que $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$, d'où : $\frac{I_{n-2}}{I_n} = \frac{n}{n-1}$
   ce qui permet de conclure que : $\boxed{1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n-2}}{I_n} \leqslant \frac{n}{n-1}}$.

   • Par sandwich on a donc $\boxed{\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n} = 1}$.

b. • Posons pour n entier naturel : $w_n = nI_nI_{n-1}$. Si $n \in \mathbb{N}$ on a alors (en utilisation la relation de la question 1c) :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)I_{n+1}I_n}{nI_nI_{n-1}} = \frac{n+1}{n}\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} = 1$$

• D'après la question 2a on a $I_n \sim I_{n-1}$ donc $nI_n^2 \sim nI_nI_{n-1} = w_n = w_1 = I_1I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, d'où :

$$\boxed{\exists \lim_{n\to+\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}}$$

3. a. • On sait que pour α réel $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ (séries de Riemann) ce qui justifie la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$.

• Pour tout $n \geqslant 1$ entier on a : $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$ or $n(n+1) \leqslant (n+1)^2$, d'où :

$$\boxed{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{(n+1)^2}}$$

• Soit $N \geqslant 2$ entier naturel on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N} \leqslant 1$

Mais $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} - 1$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} \leqslant 2$ et par passage à la limite on obtient :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \leqslant 2}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut noter que, g étant de classe C^1, f' est continue sur le segment $[0,1]$ donc est bornée sur $[0,1]$ et ainsi $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}|g'(x)| = \|g'\|_\infty$ est un réel. On a alors :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 g(x)\sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|-\left[g(x)\frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 g'(x)\frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi}\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\frac{g(0)-g(1)}{2n\pi} + \int_0^1 g'(x)\frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \frac{|g(0)|+|g(1)|}{2n\pi} + \int_0^1 \underbrace{|g'(x)|}_{\leqslant\|g'\|_\infty}\frac{|\cos(2n\pi x)|}{2n\pi}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{|g(0)|+|g(1)|}{2n\pi} + \frac{\|g'\|_\infty}{2n\pi}\int_0^1 \mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{|g(0)|+|g(1)|+\|g'\|_\infty}{2n\pi}
\end{aligned}$$

Ainsi, avec $b = \dfrac{|g(0)|+|g(1)|+\|g'\|_\infty}{2\pi}$ qui est bien indépendant de n, on a :

$$\boxed{(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\left(\left|\int_0^1 g(x)\sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{b}{n}\right).}$$

c. Soient $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi x)$ est la partie réelle de :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{i2k\pi x} &= \mathrm{e}^{i2\pi x} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i2k\pi x} = \mathrm{e}^{i2\pi x} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{i2\pi x}\right)^k \\
&= \mathrm{e}^{i2\pi x} \frac{1-\mathrm{e}^{i2n\pi x}}{1-e^{2i\pi x}} = \mathrm{e}^{i2\pi x} \frac{\mathrm{e}^{in\pi x}\left(\mathrm{e}^{-in\pi x}-\mathrm{e}^{in\pi x}\right)}{e^{i\pi x}\left(e^{-i\pi x}-e^{i\pi x}\right)} \\
&= \mathrm{e}^{i2\pi x} \frac{-2i\sin(n\pi x)\mathrm{e}^{in\pi x}}{-2i\sin(\pi x)\mathrm{e}^{i\pi x}} = \frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \mathrm{e}^{i(n+1)\pi x}
\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi x) &= 2\frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \cos((n+1)\pi x) \\
&= 2\sin(n\pi x)\cos(n\pi x)\mathrm{cotan}(\pi x) - 2\sin^2(n\pi x) \\
&= \mathrm{cotan}(\pi x)\sin(2n\pi x) + \cos(2n\pi x) - 1
\end{aligned}$$

d. • Soit x dans $]0,1[$ on a $\mathrm{cotan}(\pi x) = \dfrac{\cos \pi x}{\sin \pi x}$ et ainsi : $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{2} \, \dfrac{\cos \pi x}{\sin \pi x}$.

Or on a les développement limités à l'ordre 1 en 0 des fonctions cos et sin :

$$\cos x = 1 + x\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \sin x = x + x\varepsilon_2(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0, \ \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$$

Il vient alors pour x dans $]0,1[$:

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{2} \, \frac{1+\pi x\varepsilon_1(\pi x)}{\pi x + \pi x \varepsilon_2(\pi x)} = \frac{(x-1)}{2} \, \frac{1+\pi x\varepsilon_1(\pi x)}{\pi + \pi\varepsilon_2(\pi x)}$$

donc $\exists \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{1}{2\pi}$. On considère alors la fonction $\widetilde{f} : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0,1[\\ -\dfrac{1}{2\pi} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Cette fonction $\boxed{\widetilde{f} \text{ prolonge } f \text{ par continuité à } [0,1[}$.

• La fonction $\widetilde{f}$ est de classe C^∞ sur $]0,1[$ comme produit de fonctions de classes C^∞ sur cet intervalle et on a pour x dans $]0,1[$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}'(x) &= \frac{2x-1}{2}\mathrm{cotan}(\pi x) + \frac{x(x-1)}{2} \left(\frac{-\pi}{\sin^2 \pi x}\right) \\
&= \frac{(2x-1)\cos \pi x \ \sin \pi x - \pi x(x-1)}{2\sin^2 \pi x} \\
&\underset{x=0}{=} \frac{(2x-1)\left(1+o(x)\right)\left(\pi x - \dfrac{(\pi x)^3}{3} + o(x^3)\right) - \pi x(x-1)}{2\left(\pi x + o(x)\right)^2} \\
&\underset{x=0}{=} \frac{-\pi x + 2\pi x^2 - \pi x^2 o(1) + o(x^3) - \pi x^2 + \pi x}{2x^2\left(\pi + o(1)\right)^2} \\
&\underset{x=0}{=} \frac{\pi - \pi o(1) + o(x)}{2\left(\pi + o(1)\right)^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

Commentaire. j'ai rédigé ci-dessus avec des $o(x)$. Je rappelle que $o(x) = xo(1)$ et $\varphi(x) = o(1)$ signifie $\varphi(x) \to 0$, tout cela étant vrai au point où on considère les petits o...

• En résumé, la fonction $\widetilde{f}$ vérifie toutes les hypothèses du théorème de prolongement de la dérivée : elle est continue sur $[0,1[$, de classe C^1 sur $]0,1[$ et $\exists \lim\limits_{x\to 0^+} \widetilde{f}'(x) = \dfrac{1}{2\pi} \in \mathbb{R}$: la fonction $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur $[0,1[$.

• On peut montrer de même que f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$...

e. • Soit k dans $\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
J_k &= \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\cos(2k\pi x)\,\mathrm{d}x \underbrace{=}_{IPP} \underbrace{\left[\frac{x(x-1)}{2}\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{2x-1}{2}\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\,\mathrm{d}x \\
&\underbrace{=}_{IPP} \left[\frac{(2x-1)}{2}\frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2k\pi)^2} - \left[\frac{\sin(2k\pi x)}{(2k\pi)^3}\right]_0^1 = \frac{1}{(2k\pi)^2}
\end{aligned}$$

• Soit $n \geqslant 1$, en multipliant la relation de 3c par $\dfrac{x(x-1)}{4}$ pour x dans $]0,1[$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{x(x-1)}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\pi x) &= \underbrace{\frac{x(x-1)}{4}\mathrm{cotan}(\pi x)}_{=\frac{1}{2}f(x)}\sin(2n\pi x) + \frac{x(x-1)}{4}\cos(2n\pi x) - \frac{x(x-1)}{4} \\
&= \frac{1}{2}\widetilde{f}(x)\sin(2n\pi x) + \frac{x(x-1)}{4}\cos(2n\pi x) - \frac{x(x-1)}{4}
\end{aligned}$$

Mais cette égalité est encore valable pour $x = 0$ ou $x = 1$.

• On intègre alors entre 0 et 1 (ce qui est loisible car toutes les fonctions intégrées sont continues sur $[0,1]$) et on obtient pour tout $n \geqslant 1$ entier :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} J_k = \frac{1}{2}\int_0^1 \widetilde{f}(x)\sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\,\mathrm{d}x.}$$

f. D'après la question précédente on a pour tout $n \geqslant 1$ entier :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 4\pi^2\sum_{k=1}^{n} J_k = 2\pi^2\int_0^1 \widetilde{f}(x)\sin(2n\pi x)\mathrm{d}x + \pi^2\int_0^1 x(x-1)\cos(2n\pi x)\mathrm{d}x - \pi^2\int_0^1 x(x-1)\mathrm{d}x$$

Or $\left|\displaystyle\int_0^1 \widetilde{f}(x)\sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{b}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$ entier, d'après la question 3c (puisque $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$), ce qui amène :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \widetilde{f}(x)\sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}x = 0$$

De la même façon on montre que $\left|\int_0^1 x(x-1)\cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{c}{n}$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x(x-1)\cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Il en résulte que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} J_k = -\pi^2\int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}$ et ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

4. a. Soit $n \geqslant 1$ entier. On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)!\mathrm{e}^{n+1}} \times \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\,\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

Il vient alors en utilisant un développent limité à l'ordre 3 du logarithme naturel en 0 :

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \ln\frac{v_{n+1}}{v_n} = -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{3n^3}\varepsilon_n\right) \quad \text{où } \varepsilon_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0\\
&= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{3n^2}\varepsilon_n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{6n^3}\varepsilon_n\\
&= \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{3n^2}\varepsilon_n + \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{6n^3}\varepsilon_n\\
&= \frac{1}{12n^2}\left(1 + 4\varepsilon_n + \frac{2}{n} + \frac{2}{n}\varepsilon_n\right)
\end{aligned}$$

Comme $\alpha_n = 4\varepsilon_n + \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{n}\varepsilon_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ on a bien $\boxed{\delta_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}}$.

b. • On a $\boxed{\delta_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2} \geqslant 0}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{12n^2}$ converge (série de Riemann). Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\delta_n$ converge.

• Puis pour $n \geqslant 1$ entier on a $\delta_n = \ln v_{n+1} - \ln v_n$ donc, puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\delta_n$ converge, la suite $\ln v_n$ converge aussi vers un réel a. Par continuité de l'exponentielle, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{e}^a > 0$.

c. Posons $\lambda = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$. Selon ce qui précède $\lambda > 0$. On a $v_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{n!\mathrm{e}^n} \sim \lambda$ d'où

$$\boxed{n! \sim kn^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n} \;\text{ avec } k = \frac{1}{\lambda}}$$

d. • D'après la question 1d, on a pour $n \geqslant 1$ entier : $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Or $(2n)! \sim k(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2n}$ et $(n!)^2 \sim k^2n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}n$, donc :

$$I_{2n} \sim \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{n}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{k\sqrt{2n}} \qquad (*)$$

• D'autre part, d'après la question 2b, on a : $2nI_{2n}^2 \sim \dfrac{\pi}{2}$, d'où $I_{2n} \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

Avec $(*)$, par transitivité de $\sim$, on a donc : $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}} \sim \dfrac{\pi}{k\sqrt{2n}}$. On dispose alors d'une suites α_n telles que $\alpha_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi}{k\sqrt{2n}}\,(1+\alpha_n) \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\pi}{k\sqrt{2}}\,(1+\alpha_n)$$

Cela force, par passage à la limite, $k = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et ainsi on a bien :

$$\boxed{n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}.$$