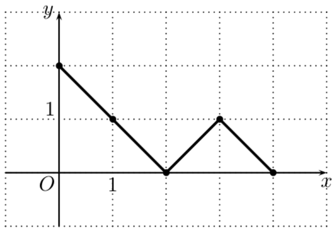
Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, une correction

Préliminaires

1. On a $S_0(\omega) = 2$, $S_1(\omega) = 1$, $S_2(\omega) = 0$, $S_3(\omega) = 1$ et $S_4(\omega) = 0$. La trajectoire associée à ω est donc la suivante.



2. La variable aléatoire X_{k+1} ne peut prendre que les valeur -1 et 1. Ainsi, si cette trajectoire représente l'issue ω, on a $S_{k+1}(\omega) = x + 1$ ou $S_{k+1}(\omega) = x - 1$.

   Conclusion. La trajectoire considérée peut atteindre les points $(k + 1, x + 1)$ avec la probabilité p et $(k + 1, x - 1)$ avec la probabilité $1 - p$.

3. A chaque issue de l'expérience est associé une trajectoire. Deux issues différentes auront deux trajectoires différentes. Comme il y a 2^n issues, il y a 2^n trajectoires possibles.

4. L'événement $[S_1 = 1] \cap [S_2 = 0]$ correspond à toutes les trajectoires qui passent par les points $(1, 1)$ et $(2, 0)$.

Partie I - *Principe de réflexion et applications*

1. On raisonne par *analyse/synthèse.*

   • *Analyse*. On suppose qu'il existe une trajectoire de m à n. Entre les instants m et n ($m \leqslant n$ qui est la dernière abscisse possible d'une trajectoire), on a tiré k fois Pile et $n - m - k$ fois face pour un certain entier k dans $\{0, \dots, n - m\}$. Ainsi on a :

$$\nu - \mu = k - (n - m - k) = 2k - (n - m).$$

   Il en résulte que $\nu - \mu + (n - m)$ est paire ce qui impose que $\boxed{\nu - \mu \text{ et } n - m \text{ sont de même parité}}$. Puis on a :

$$|\nu - \mu| = 2k - (n - m) \leqslant 2(n - m) - (n - m) = n - m.$$

   Conclusion partielle. Une condition nécessaire à l'existence d'une trajectoire entre M et N est :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \nu - \mu \text{ et } n - m \text{ sont de même parité} \\ |\nu - \mu| \leqslant n - m \end{cases}.$$

   • *Synthèse*. On va montrer que la condition précédente est suffisante. Supposons donc que $(\mathcal{P})$ est vérifiée.

Comme $\nu - \mu$ et $n - m$ sont de même parité, il existe k entier naturel tel que $\nu - \mu + (n - m) = 2k$. Puis on a $|\nu - \mu| \leqslant n - m$ donc

$$m - n \leqslant 2k - (n - m) \leqslant n - m \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant 2k \leqslant 2(n - m)$$

et ainsi $k \in \{0, \dots, n - m\}$. Considérons maintenant la trajectoire quittant N et définie par : *on obtient successivement k fois Pile à partir du point M puis $n - m - k$ fois Face.* Cette trajectoire passe alors par le point d'abscisse $n + (m - n) = m$ et d'ordonnée $n - k - (n - m - k) = m$, c'est à dire le point M.

Conclusion. Une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une trajectoire entre M et N est :

$$\begin{cases} \nu - \mu \text{ et } n - m \text{ sont de même parité} ; \\ |\nu - \mu| \leqslant n - m. \end{cases}$$

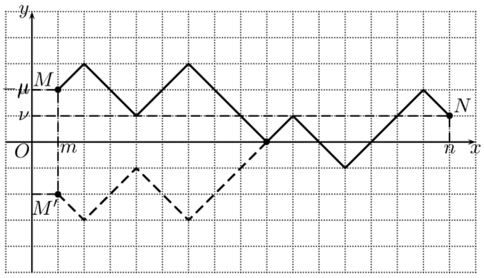
2. Le nombre de trajectoires entre M et N correspond, selon ce qui précède, au nombre de manières de placer $k = \dfrac{1}{2}(\nu - \mu + n - m)$ Pile parmi $n - m$ lancers : il s'agit de $\boxed{\mathcal{T}_{M,N} = \dbinom{n-m}{k}}$.

   __Cas particulier.__ Lorsque $M = O$ (origine du repère), on a donc $\mathcal{T}_{O,N} = \dbinom{n}{\frac{1}{2}(n+\nu)}$.

3. **Principe de réflexion**

   a. On va construire une bijection de l'ensemble $T_0(M, N)$ des trajectoires de M à N passant par l'axe Ox sur l'ensemble $T(M', N)$ des trajectoires de M' à N.

   Prenons T une trajectoire dans $T_0(M, N)$. Cette trajectoire rencontre **pour la première fois** l'axe Ox en un point I. On associe alors à cette trajectoire, la trajectoire T' de M' à N définie de la manière suivante : le premier morceau de T' est le symétrique par rapport à Ox de la ligne brisée joignant M à I définie par la trajectoire T et le second morceau de T' est la ligne brisée définie par la portion de T reliant I à N.



   Plus précisément, soit $T \in T_0(M, N)$ que l'on décrit par ses points d'abscisse entière :

$$T = \{(i, S(i)) \mid i \in \{m, \dots, n\}\}.$$

   Soit $i_0 = \min\{i \in \{m, \dots, n\} \mid S(i) = 0\}$. On définit alors T' par :

$$T' = \{(i, -S(i)) \mid i \in \{m, \dots, i_0\}\} \cup \{(i, -S(i)) \mid i \in \{i_0 + 1, \dots, n\}\}.$$

   Il s'agit bien d'une trajectoire de M' à N et on pose $T' = f(T)$. On a ainsi défini une fonction :

$$f : T_0(M, N) \to T(M', N).$$

   Considérons maintenant $g : T(M', N) \to T_0(M, N)$ définie de la manière suivante. Lorsque T dans $T(M', N)$ s'écrit $T = \{(i, S(i)) \mid i \in \{m, \dots, n\}\}$, on pose $i_0 = \min\{i \in \{m, \dots, n\} \mid S(i) = 0\}$ ainsi que :

$$g(T) = \{(i, -S(i)) \mid i \in \{m, \dots, i_0\}\} \cup \{(i, S(i)) \mid i \in \{i_0 + 1, \dots, n\}\}.$$

On a alors de manière évidente $f \circ g = \mathrm{Id}_{T(M',N)}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{T_0(M,N)}$ ce qui prouve que f est bijective. Il en résulte que :

$$\boxed{\mathrm{card}(T_0(M,N)) = \mathrm{card}(T(M',N))}$$

b. Pour aller de M à N, on a vu qu'il faut et qu'il suffit de tirer $k = \dfrac{1}{2}(\nu+\mu+n-m)$ fois Pile et $n-m-k$ fois face. Les trajectoires de M à N sont toutes équiprobables de probabilité $p^k(1-p)^{n-m-k}$. On a aussi vu qu'il y a $\dbinom{n-m}{k}$ trajectoires de M à N. Parmi toutes ces trajectoires, il y en a $T_{M',N}$ qui rencontre l'axe Ox, selon le principe de réflexion.
La probabilité cherchée est donc $\dfrac{\mathcal{T}_{M,N} - \mathcal{T}_{M',N}}{\mathcal{T}_{M,N}} = 1 - \dfrac{\mathcal{T}_{M',N}}{\mathcal{T}_{M,N}}$.
Enfin on a $\mathcal{T}_{M',N} = \dbinom{n-m}{\ell}$ où $\ell = \dfrac{1}{2}(\nu+\mu+n-m)$ selon la question 2.

Conclusion. Lorsque partant de M on arrive à N, la probabilité de ne jamais passer par l'axe Ox est :

$$1 - \frac{\dbinom{n-m}{\ell}}{\dbinom{n-m}{k}},$$

où $\ell = \dfrac{1}{2}(\nu+\mu+n-m)$ et $k = \dfrac{1}{2}(\nu-\mu+n-m)$.

NB : noter qu'il s'agit d'une probabilité pour la loi conditionnelle $P_{[S(m)=\mu, S(n)=\nu]} \cdots$

4. **Deux applications**

a. Les prises de bulletin dans l'urne pour le dépouillement sont équiprobables. Chaque bulletin pour A est compté $+1$ et chaque bulletin pour B est compté -1. Un dépouillement est alors une trajectoire de l'origine du repère au point $N = (1000, 200)$. Leur nombre est $\mathcal{T}_{O,N} = \dbinom{1000}{600}$ (question 2).
Posons $n = 1000$ et $\nu = 200$.
Une trajectoire pour laquelle A est majoritaire reste strictement au dessus de l'axe Ox dès le point d'abscisse 1, qui est nécessairement $(1,1)$. On est donc ramené à déterminer le nombre de trajectoires du point $(1,1)$ au point N qui ne rencontrent pas l'axe des abscisses.
Selon la question précédente, leur nombre est $\dbinom{n-1}{k} - \dbinom{n-1}{\ell}$ où

$$\ell = \frac{1}{2}(200+1+1000-1) = 600 \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{2}(200-1+1000-1) = 599 = \ell - 1.$$

Mais on a :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{\ell-1} - \binom{n-1}{\ell} &= \frac{(n-1)!}{(\ell-1)!}\left(\frac{1}{(n-\ell)!} - \frac{1}{\ell(n-1-\ell)!}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(\ell-1)!} \times \frac{\ell-(n-\ell)}{\ell(n-\ell)!} = \frac{(n-1)!}{\ell!} \times \frac{2\ell-n}{(n-\ell)!}
\end{aligned}$$

La probabilité cherchée est donc :

$$\frac{\binom{n-1}{\ell-1}-\binom{n-1}{\ell}}{\binom{n}{\ell}} = \frac{(n-1)!}{\ell!} \times \frac{2\ell-n}{(n-\ell)!} \times \frac{\ell!(n-\ell)!}{n!}$$

$$= \frac{2\ell-n}{n} = \frac{\nu}{n} = \frac{1}{5}$$

Conclusion. La probabilité que A ait été majoritaire tout le long du dépouillement du scrutin est $\frac{1}{5}$.

b. **File d'attente**

Appelons N_0 le nombre initial de billets de 5 zoros en caisse. Notons que, lorsque toutes les personnes sont entrées, il y a dans la caisse, 40 billets de 10 zoros et $20 + N_0$ billets de 5 zoros.

A chaque nouveau client, le nombre de billets de 5 zoros augmente ou diminue de 1 : le nombre de billet de 5 zoros en caisse est donc une trajectoire de point initiale $M = (0, N_0)$ et de point final $(100, 20 + N_0)$. On cherche la probabilité que cette trajectoire reste au dessus (pas forcément strictement) de l'axe des abscisses. Il s'agit de la probabilité que cette trajectoire ne rencontre jamais l'axe $y = -1$. Un changement d'origine du repère assure alors qu'il s'agit de la probabilité qu'une trajectoire de $M = (0, N_0 + 1)$ à $(100, 20 + N_0 + 1)$ ne rencontre jamais l'axe $y = 0$. Cette probabilité est, d'après la question 3 :

$$p = 1 - \frac{\binom{100}{\ell}}{\binom{100}{k}},$$

où $\ell = \frac{1}{2}(22 + 2N_0 + 100) = 61 + N_0$ et $k = \frac{1}{2}(20 + 100) = 60$.

On a donc $p = 1 - \dfrac{\binom{100}{61+N_0}}{\binom{100}{60}}$

Le tableau suivant qui donne des valeurs approchées de p par défaut au millième.

N_0	0	1	2	3	4	5
p	0,344	0,587	0,751	0,856	0,920	0,957

Comme p est fonction croissante de N_0, on peut conclure.

Conclusion. Il faut 5 billets de 5 zoros dans la caisse au minimum, pour que, avec la probabilité d'au moins 95%, chacun soit servi dès qu'il se présente.

Partie II - *Retour à zéro pour une marche aléatoire symétrique*

1. L'événement $[S_{2n} = 0]$ signifie que la trajectoire passe par le point $(2n, 0)$.

2. Le nombre de trajectoire allant de l'origine du repère au point $(2n, 0)$ est $\binom{2n}{n}$ d'après la question 2 de la partie 1. Comme il y a 2^{2n} trajectoires qui vont jusqu'à un point d'abscisse $2n$, on peut conclure

que :

$$\boxed{\mu_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}}.$$

3. a. Une trajectoire quittant le point $(2n-1, 1)$ ne peut atteindre que deux points : les points $(2n, 0)$ et $(2n, 2)$. Ainsi il n'existe qu'un prolongement possible de la trajectoire de ω à partir du point $(2n-1, S_{2n-1}(\omega))$ sur laquelle $S_{2n} > 0$.

   b. On considère les points $A(1,1)$, $A'(1,-1)$ et $B = (2n-1, 1)$. D'après le principe de réflexion, on a :

$$\boxed{p_{2n-1} = \mathcal{T}_{A,B} - \mathcal{T}_{A,A'} = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}}.$$

   c. On considère une trajectoire (événement) ω sur laquelle, pour tout $i \in \{1, \ldots, 2n-1\}$, $S_i(\omega) > 0$. Mais, pour tout $i \in \{1, \ldots, 2n\}$, $S_i(\omega)$ est de même parité que i (récurrence élémentaire). Il en résulte que $S_{2n-1}(\omega) = 1$ ou $S_{2n-1}(\omega) \geqslant 3$. Mais :
   - Il y a p_{2n-1} trajectoires de cette forme telles que $S_{2n-1}(\omega) = 1$ et il n'y a qu'un seul prolongement possible de cette trajectoire restant au dessus strictement de l'axe Ox ;
   - Il y a $\nu_{2n-1} - p_{2n-1}$ trajectoires de cette forme telles que $S_{2n-1}(\omega) \geqslant 3$, et il y a deux prolongements possibles ne rencontrant pas Ox.

   Il en résulte que :

$$\boxed{\nu_{2n} = p_{2n-1} + 2(\nu_{2n-1} - p_{2n-1}) = 2\nu_{2n-1} - p_{2n-1}}.$$

   d. Mais $\nu_{2n-1} = 2\nu_{2n-2}$ (évident d'après ce que l'on a vu à la question précédente). Il vient donc :

$$\nu_{2n} = 4\nu_{2n-2} - p_{2n-1}.$$

   On fait alors une récurrence, en utilisant le fait que $p_{2n-1} = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}$, pour montrer que :

$$\boxed{\nu_{2n} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n}}.$$

4. Soit T une trajectoire, liée à une issue ω, qui ne passe pas par 0 entre les instants 1 et $2n$. Par continuité (théorème des valeurs intermédiaires), elle est située soit au dessus, soit au dessous (strictement !) de l'axe des abscisse sur $[1, 2n]$. On a donc :

$$[S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0] = [S_1 > 0, \ldots, S_{2n} > 0] \sqcup [S_1 < 0, \ldots, S_{2n} < 0].$$

   Par symétrie, il vient :

$$P(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) = 2P(S_1 > 0, \ldots, S_{2n} > 0) = 2\frac{\nu_{2n}}{2^{2n}} = \mu_{2n}.$$

5. • Pour simplifier, on représente une trajectoire par les ordonnées de ces points d'abscisse entière. A une trajectoire $(0, y_1, \ldots, y_{2n})$ de B_{2n} on associe la trajectoire $(0, 1, y_1+1, \ldots, y_{2n}+1)$ de A_{2n+1}. Il s'agit bien d'une bijection, la bijection réciproque étant l'application qui à une trajectoire $(0, y_1, \ldots, y_{2n+1})$ de A_{2n+1} associe la trajectoire $(y_1 - 1, \ldots, y_{2n+1} - 1)$ de B_{2n} puisque $y_1 = 1$.

   • Comme il existe une bijection de B_{2n} sur A_{2n+1}, ces deux ensembles ont même cardinal qui est $\nu_{2n+1} = 2\nu_{2n} = \binom{2n}{n}$. Il en résulte que :

$$\boxed{P(B_{2n}) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \mu_{2n}}.$$

6. **Premier retour en** 0

   Les événements $[S_{2n}=0]$ et $[S_{2n}\neq 0]$ formant un système complet, on a :

$$\underbrace{P(S_1\neq 0,\dots,S_{2n-2}\neq 0)}_{=P(B_{2n-2})}=\underbrace{P(S_1\neq 0,\dots,S_{2n-2}\neq 0,S_{2n}=0)}_{=P(E_{2n})}+\underbrace{P(S_1\neq 0,\dots,S_{2n-2}\neq 0,S_{2n}\neq 0)}_{P(B_{2n})}$$

   Il en résulte, selon la question précédente, que $\boxed{P(E_{2n})=\mu_{2n-2}-\mu_{2n}}$.

7. **Probabilité de retour en** 0 **en temps infini.**

   a. On a $[T_0<+\infty]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}E_{2n}$, l'union étant disjointe (noter qu'une trajectoire ne peut revenir à 0 en temps impair, puisque $p=\frac{1}{2}$ et $S_0=0\ldots$). Ainsi, par σ-additivité :

$$\boxed{P(T_0<+\infty)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(E_{2n})}.$$

   b. Pour tout N entier on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}P(E_{2n})=\sum_{n=1}^{N}\mu_{2n-2}-\mu_{2n}=\mu_0-\mu_{2N}=1-\frac{\binom{2N}{N}}{2^{2N}}$.

   Mais la formule de Stirling dit que $n!\underset{+\infty}{\sim}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2n\pi}$, donc :

$$\frac{\binom{2N}{N}}{2^{2N}}=\frac{(2N)!}{(N!)^2 2^{2N}}\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{\left(\frac{2N}{\mathrm{e}}\right)^{2N}\sqrt{4N\pi}}{\left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^{2N}(2N\pi)2^{2N}}=\frac{1}{\sqrt{N\pi}}.$$

   Ainsi $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{\binom{2N}{N}}{2^{2N}}=0$, ce qui amène : $\displaystyle P(T_0<+\infty)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}P(E_{2n})=1$.

   Conclusion.
   $\boxed{P(T_0<+\infty)=1 : \text{une trajectoire revient donc presque sûrement en 0 en temps fini}}$.

8. **Tous les entiers sont atteints.** On prend bien sûr $a\neq 0$, le cas $a=0$ ayant été traité ci-dessus.

   a. Tout d'abord on a $[T_a=+\infty]=E$. Puis les événements $([T_0=k])_{k\in\mathbb{N}}$ et $[T_0=+\infty]$ forment un système complet d'événements :

$$P(E)=P(E\cap[T_0=+\infty])+\sum_{k=0}^{+\infty}P([T_0=k]\cap E).$$

   Comme $E\cap[T_0=+\infty]\subset[T_0=+\infty]$ et $P(T_0=+\infty)=0$ (question précédente), on peut conclure.

   Conclusion. $\boxed{P(T_a=+\infty)=\sum_{k=1}^{+\infty}P([T_0=k]\cap E) \text{ où } E \text{ est l'événement } E=\bigcap_{n\geqslant 0}[S_n\neq a]}$.

   b. Soit $k\geqslant 1$ entier. Par double inclusion, on a de suite $[T_0=k]\cap E=E_k\cap F_k$ donc :

$$\boxed{P([T_0=k]\cap E)=P(E_k\cap F_k)}.$$

c. • Soit $k \geqslant 1$ entier. E_k n'est autre que l'événement $[T_a > T_0] \cap [T_0 = k]$, comme cela se voit de suite par double inclusion. Il en résulte que :

$$\boxed{P(E_k) = P(T_a > T_0, T_0 = k)}. \qquad (\clubsuit)$$

• D'après les questions **II-8a** et **II-8b**, on a :

$$P(T_a = +\infty) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([T_0 = k] \cap E) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k \cap F_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{E_k}(F_k) \times P(E_k).$$

Mais avec $a \neq 0$, $P_{E_k}(F_k) = P(E) = P(T_a = +\infty)$. Il vient donc le résultat souhaité, en tenant compte de ($\clubsuit$).

Conclusion. $\boxed{P(T_a = +\infty) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T_a > T_0, T_0 = k) P(T_a = +\infty)}$.

d. • Avec $a \neq 0$, $[T_a < T_0]$ et $[T_a > T_0]$ forment un système complet d'événements :

$$P(T_a > T_0) = 1 - P(T_a < T_0).$$

Montrons alors que $P(T_a < T_0) \neq 0$.

— Supposons par exemple $a > 0$. On considère l'événement :

$$H = [S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 2, \ldots, S_a = a].$$

On a $H \subset [T_a < T_0]$ et $P(H) = \dfrac{1}{2^a}$ donc $P(T_a < T_0) \geqslant \dfrac{1}{2^a}$.

— Si maintenant $a < 0$, on considère

$$H = [S_0 = 0, S_1 = -1, S_2 = -2, \ldots, S_a = a],$$

et le même raisonnement que ci-dessus montre que $P(T_a < T_0) \geqslant \dfrac{1}{2^{|a|}}$.

Conclusion. $\boxed{P(T_a > T_0) < 1}$.

• Le résultat de la question précédente permet de dire que :

$$P[T_a = +\infty] = P(T_a = +\infty) \times \sum_{k=0}^{+\infty} P(T_a > T_0, T_0 = k).$$

Or on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(T_a > T_0, T_0 = k) = P(T_a > Y_0) - P([T_a > T_0] \cap [T_0 = +\infty])$.

Comme $[T_a > T_0] \cap [T_0 = +\infty] \subset [T_0 = +\infty]$ on a $P([T_a > T_0] \cap [T_0 = +\infty]) = 0$ d'où :

$$P[T_a = +\infty] = P(T_a = +\infty) P(T_a > Y_0).$$

On a donc $\underbrace{(1 - P(T_a > Y_0))}_{\neq 0} P(T_a = +\infty) = 0$ donc $P(T_a = +\infty) = 0$.

Conclusion. $P(T_a = +\infty) = 0$: la marche aléatoire (sa trajectoire) passe presque sûrement par un point d'ordonnée a.

Partie III - *Quelques propriétés supplémentaires des marches aléatoires symétriques*

1. **Marche aléatoire bornée, modèle du joueur.**

   a. La fortune du joueur peut être représentée par une marche aléatoire symétrique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $S_0 = m$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $S'_n = S_n - S_0$. $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire symétrique telle que $S'_0 = 0$. Selon la partie précédente (question **II-8**), en utilisant les mêmes notations, $P(T_{b-m} = +\infty) = 0$: cela signifie que la personne s'arrête de jouer presque sûrement.

   b. • Soit $m \in \{1, \ldots, b-1\}$. Notons X_1 la variable aléatoire donnant 1 si le résultat du premier lancé est Pile et 0 sinon. Cette variable aléatoire suit une loi $\mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$. Appelons encore G l'événement : *la personne atteint son objectif en partant d'un capital m*. Comme $[X_1 = 1]$ et $[X_1 = 0]$ est un système complet d'événements, on a (formule des probabilités totales) :

   $$\begin{aligned} p_m = P(G) &= P(G \cap [X_1 = 1]) + P(G \cap [X_1 = 0]) \\ &= P_{[X_1=1]}(G)P(X_1 = 1) + P_{[X_1=0]}(G)P(X_1 = 0). \end{aligned}$$

   Comme $P_{[X_1=1]}(G) = p_{m+1}$ et $P_{[X_1=0]}(G) = p_{m-1}$, on en déduit immédiatement que :

   $$\boxed{p_m = \tfrac{1}{2}p_{m-1} + \tfrac{1}{2}p_{m+1}}.$$

   • Pour m entier naturel, on a donc :

   $$p_{m+2} - 2p_{m+1} + p_m = 0.$$

   Ainsi $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation résolvante est $X^2 - 2X + 1 = 0$. Elle admet une solution double qui est 1. Ainsi il existe deux constantes réelles α et β telles que :

   $$p_m = \alpha m + \beta.$$

   Avec $p_0 = 0$ et $p_b = 1$, on obtient $\beta = 0$ et $\alpha = \dfrac{1}{b}$.

   Conclusion. $\boxed{\text{Pour tout } m \in \mathbb{N} \text{ on a } p_m = \dfrac{m}{b}}$.

2. **Récurrence**.

   a. $\boxed{\boxed{\text{Question magnifique!!!}}}$

   Analysons l'événement $[\sup S_n = +\infty]$. Cet événement est réalisé si et seulement si pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[S_n \geqslant N]$ soit réalisé. On a donc :

   $$[\sup S_n = +\infty] = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [S_n \geqslant N] \right).$$

   • Fixons $N \in \mathbb{N}$ et estimons $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [S_n \geqslant N] \right)$.

   On a vu, avec les notations de la partie **III-8**, que : $P(T_N = +\infty) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [S_n \neq N] \right) = 0$.

   Ainsi $P\left(\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [S_n \neq N]} \right) = 1$. Mais

   $$\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [S_n \neq N]} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{[S_n \neq N]} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [S_n = N] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [S_n \geqslant N],$$

puisque, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $[S_n = N] \subset [S_n \geqslant N]$.

On a donc, par croissance d'une mesure de probabilité : $\boxed{P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [S_n \geqslant N]\right) = 1}$.

• Déterminons maintenant $P[\sup S_n = +\infty]$. On a

$$[\sup S_n < +\infty] = \overline{\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [S_n \geqslant N]\right)} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [S_n \geqslant N]}\right).$$

La propriété de sous-additivité permet d'écrire, dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$P(\sup S_n < +\infty) \leqslant \sum_{N=0}^{+\infty} P\left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [S_n \geqslant N]}\right).$$

Mais on vient de montrer que $P\left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [S_n \geqslant N]}\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $P(\sup S_n < +\infty) = 0$ (Note [1]) donc :

$$P[\sup S_n = +\infty] = 1 - P(\sup S_n < +\infty) = 1.$$

• Le résultat $P(\inf S_n = -\infty) = 1$ se montre de la même manière.

Conclusion. $\boxed{P(\sup S_n = +\infty) = 1 \text{ et } P(\inf S_n = -\infty) = 1}$.

Interprétation. Une marche aléatoire symétrique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ atteint des valeurs arbitrairement grandes et petites.

b. Si $a = 0$, le résultat a déjà été démontré (question **II-7**). Prenons a dans $\mathbb{Z}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\{n \in N \mid S_n = a\}$ soit fini.
Soit N son plus grand élément. Pour tout $n \geqslant N + 1$, la trajectoire de S_n ne passe pas par a : selon le théorème des valeurs intermédiaires (une trajectoire est continue !), on a $S_n > a$ ou $S_n < a$.
Dans le premier cas, on obtient une contradiction avec $P(\inf S_n = -\infty) = 1$ et dans le second cas, on obtient une contradiction avec $P(\sup S_n = +\infty) = 1$.

Conclusion. $\boxed{\text{Pour } a \in \mathbb{Z},\ \{n \in N \mid S_n = a\} \text{ est presque sûrement infini}}$.

Commentaire. L'idée derrière cette question est la suivante : comme on a presque sûrement $\sup S_n = +\infty$ et $\inf S_n = -\infty$, la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit (presque sûrement) faire une infinité de va-et-viens entre des valeurs positives et négatives de plus en plus grande. Pour ce faire, elle devra alors passer par toutes les valeurs intermédiaires, ce une infinité de fois !

1. On vient de rencontrer le phénomène suivant suivant : *la probabilité d'un événement qui est union (même strictement dénombrable) d'événements (pas forcément disjoints) de probabilité nulle est encore nulle.*