Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Ce texte propose une étude des *marches aléatoires* sur $\mathbb{Z}$.

On considère le jeu suivant : un joueur lance successivement et indépendamment n fois une pièce de monnaie. Chaque fois qu'il obtient Pile, il gagne un point ; sinon il perd un point.

Soit $p \in]0,1[$, la probabilité d'obtenir Pile pour chaque lancer. L'espace des issues est :

$$\Omega_n = \{Pile, Face\}^n \, .$$

La probabilité P sur Ω_n est donnée par $P(\{\omega\}) = p^r(1-p)^{n-r}$ où r est le nombre de *Pile* obtenus dans ω_n. Dans le cas où $p = \dfrac{1}{2}$, on peut noter que P est la probabilité uniforme sur Ω_n.

On définit les variables aléatoire $X_1, \ldots, X_n$, $S_0, S_1, \ldots, S_n$ sur Ω_n en posant, pour k dans $\{1, \ldots, n\}$ et $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n$:

- $X_k(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_k = Pile \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$;
- $S_0 = P$ où P est le nombre de points que possède le joueur au départ ;
- $S_k = P + X_1 + \cdots + X_k$.

La variable aléatoire X_k représente le gain du joueur (positif ou négatif) au k-ième lancer. La variable S_k représente la fortune du joueur après le k-ième lancer (instant k). On peut représenter une partie complète, à savoir un élément ω de Ω_n, par une trajectoire dans le plan qui est la ligne brisée reliant, pour k dans $\{0, \ldots, n-1\}$, les points $(k, S_k(\omega))$ et $(k+1, S_{k+1}(\omega))$.

La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle une *marche aléatoire sur* $\mathbb{Z}$. Une telle marche aléatoire est dite *symétrique* lorsque $p = \dfrac{1}{2}$.

Préliminaires

1. Pour $n = 4$, $P = 2$ et $\omega = Face/Face/Pile/Face$, représenter la trajectoire de ω.
2. On considère une trajectoire se trouvant au point (k, x) à l'instant k ($k \in \{0, \ldots, n\}$ et x dans $\mathbb{Z}$). Déterminer les points suivants possibles de cette trajectoire, ainsi que la probabilité qu'elle les atteigne.
3. Quelle est le nombre de trajectoires possibles ?
4. Décrire en terme de trajectoires l'événement $[S_1 = 1] \cap [S_2 = 0]$.

Partie I - *Principe de réflexion et applications*

Dans la suite m est un entier naturel, μ, ν des entiers relatifs et $M = (m, \mu)$, $N = (n, \nu)$ sont dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que M est un point où passe une trajectoire. On notera $\mathcal{T}_{M,N}$ ou $\mathcal{T}_{(m,\mu),(n,\nu)}$, le nombre de trajectoires qui relient le point M au point N.

1. Démontrer qu'il existe une trajectoire $T_{M,N}$ de $M = (m, \mu)$ à $N = (n, \nu)$ si et seulement si :
$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \nu - \mu \text{ et } n - m \text{ sont de même parité} \\ |\nu - \mu| \leqslant n - m \end{cases} .$$
2. Déterminer $\mathcal{T}_{M,N}$.
3. **Principe de réflexion**
   On suppose $\mu > 0$, $\nu > 0$. On note M' le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

a) Démontrer qu'il y a autant de trajectoires de M à N passant par l'axe Ox que de trajectoires de M' à N.

b) En déduire, lorsque partant de M on arrive à N, la probabilité de ne jamais passer par l'axe Ox.

4. **Deux applications**

   a) Au cours d'un scrutin opposant deux candidats A et B, où toutes les personnes se sont exprimées, le candidat A a obtenu 600 voix et le candidat B a obtenu 400 voix.
   Déterminer la probabilité que A ait été majoritaire tout le long du dépouillement du scrutin.

   b) **File d'attente**
   Cent personnes font la queue à un guichet de cinéma. La place coûte 5 zoros. Soixante personnes n'ont en poche qu'un billet de 5 zoros. Les autres ont chacune un billet de 10 zoros.
   Combien faut-il de billets de 5 zoros dans la caisse pour que, avec la probabilité d'au moins 95%, chacun soit servi dès qu'il se présente ?

Partie II - *Retour à zéro pour une marche aléatoire symétrique*

On suppose ici que la pièce est équilibrée, i.e. $p = \dfrac{1}{2}$ et que $S_0 = 0$: la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc symétrique.

1. Que signifie, en terme de trajectoires, l'événement $[S_{2n} = 0]$?
2. Déterminer $\mu_{2n} = P(S_{2n} = 0)$.
3. Pour k dans $\{1, \dots, 2n\}$, on note ν_k le nombre de trajectoires sur lesquelles, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a $S_i > 0$. Le but de cette question est de montrer que $\nu_{2n} = \dfrac{1}{2}\dbinom{2n}{n}$.

   a) Soit ω dans Ω_{2n} tel que $S_{2n-1}(\omega) = 1$ et $S_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, 2n-2\}$. Combien y-a-t-il de prolongements possibles de la trajectoire de ω à partir du point $(2n-1, S_{2n-1}(\omega))$ sur lesquelles $S_{2n} > 0$?

   b) On note p_{2n-1} le nombre de trajectoires correspondantes à des issues ω telles que :
   $$S_1(\omega) > 0, \dots, S_{2n-2}(\omega) > 0, S_{2n-1}(\omega) = 1.$$
   En utilisant le principe de réflexion, déterminer p_{2n-1}.

   c) Démontrer que $\nu_{2n} = 2\nu_{2n-1} - p_{2n-1}$.

   d) Justifier que $\nu_{2n} = 4\nu_{2n-2} - p_{2n-1}$ et en déduire que $\nu_{2n} = \dfrac{1}{2}\dbinom{2n}{n}$.

4. Démontrer que $\mu_{2n} = P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0)$.
5. On considère les ensembles de trajectoires (événements) suivant :
   - $B_{2n} = [S_1 \geqslant 0, \dots, S_{2n} \geqslant 0]$;
   - $A_{2n+1} = [S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0, S_{2n+1} > 0]$.

   Exhiber une bijection de B_{2n} sur A_{2n+1}. En déduire $P(B_{2n})$.
6. **Premier retour en** 0
   On considère l'événement E_{2n} : « *on revient en* 0 *pour la première fois au temps* $2n$ ». Démontrer que $P(E_{2n}) = \mu_{2n-2} - \mu_{2n}$.
7. **Probabilité de retour en** 0 **en temps infini.**
   Dans cette question, on note T_0 la variable aléatoire qui, à une trajectoire infinie (qui correspond à une infinité de lancés) associe le temps du premier retour en 0.

   a) Déterminer les valeurs prises par T_0. Justifier que $P(T_0 < +\infty) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_{2n})$.

   b) A l'aide la formule de Stirling, démontrer que $P(T_0 < +\infty) = 1$. Interpréter ce résultat.

8. **Tous les entiers sont atteints.**
Pour $a \in \mathbb{Z}^*$, on définie l'instant de premier passage en a par :

$$T_a = \begin{cases} \inf \{n \in \mathbb{N} \mid S_n = a\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N} \mid S_n = a\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

   a) Justifier que $P(T_a = +\infty) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([T_0 = k] \cap E)$ où E est l'événement $E = \bigcap_{n \geqslant 0} [S_n \neq a]$.
   b) Soient, pour $k \geqslant 1$ entier, $E_k = [S_1 \neq a, S_1 \neq 0, \ldots, S_{k-1} \neq a, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0]$ et $F_k = \bigcap_{n \geqslant k+1} [S_n \neq a]$.
   Justifier que $P([T_0 = k] \cap E) = P(E_k \cap F_k)$.
   c) Quel lien y-a-t-il entre $P(E_k)$ et $P(T_a > T_0, T_0 = k)$? En déduire que :

$$P[T_a = +\infty] = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T_a > T_0, T_0 = k) P(T_a = +\infty).$$

   d) Montrer que $P(T_a > T_0) < 1$ puis que $P(T_a = +\infty) = 0$. Interpréter ce résultat.

Partie III - *Quelques propriétés supplémentaires des marches aléatoires symétriques*

On suppose ici que la marche aléatoire $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est symétrique.

1. **Marche aléatoire bornée, modèle du joueur.**
Une personne dispose d'un capital de départ m (m entier). Elle joue à pile ou face de manière répété une somme de 1, jusqu'a atteindre un but b qu'elle s'est fixée au départ ($b > 1$ entier), ou bien jusqu'à ce qu'elle ne puisse plus jouer (lorsque sa fortune atteint la valeur 0). Quelle est la probabilité pour qu'elle atteigne son objectif b ?
On note p_m la probabilité de succès du joueur lorsque son capital de départ est m.
   a) Justifier que la personne s'arrête de jouer presque sûrement.
   b) On suppose que $m \in \{1, \ldots, b-1\}$. Justifier que $p_m = \frac{1}{2} p_{m-1} + \frac{1}{2} p_{m+1}$. En déduire p_m, pour tout $m \in]0, b[$.
2. **Récurrence**.
   a) Démontrer que $P(\sup S_n = +\infty) = 1$ et $P(\inf S_n = -\infty) = 1$. Interpréter ces résultats.
   b) Démontrer que tout $a \in \mathbb{Z}$ est visité une infinité de fois, c'est à dire que $\{n \in N \mid S_n = a\}$ est presque sûrement infini.