Exercice probabilités CCP 2022 avec un bonus, une correction

Partie 1 - Étude des longueurs de séries.

1. • L'événement $[L_1 = n]$ est réalisé exactement lorsque les n premiers lancers donnent Pile et le $(n+1)$-*ième* Face ou lorsque les n premiers lancers donnent Face et le $(n+1)$-*ième* Pile. Ainsi :

$$\boxed{[L_1 = n] = (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) \sqcup (F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1})}$$

• Par incompatibilité $P(L_1 = n) = P(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) + P(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1})$.
Puis par indépendance : $P(L_1 = n) = P(P_1)\,P(P_2)\ldots P(P_n)\,P(F_{n+1}) + P(F_1)\,P(F_2)\ldots P(F_n)\,P(P_{n+1})$.

Conclusion. $\boxed{P(L_1 = n) = p^n q + q^n p}$.

• On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^n q + q^n p \underbrace{=}_{correctement} q\sum_{n=1}^{+\infty} p^n + p\sum_{n=1}^{+\infty} q^n \\
&= q\frac{p}{1-p} + p\frac{q}{1-q} = \frac{qp(1-q)+qp(1-p)}{(1-p)(1-q)} \\
&= \frac{qp(1-q)}{q(1-q)} + \frac{qp(1-p)}{(1-p)p} = p + q = 1
\end{aligned}$$

• Comme $\Omega = [L_1 = +\infty] \sqcup \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} [L_1 = n] \right)$ il vient $P(L_1 = +\infty) = 0$.

2. a. • Soient n et k dans $\mathbb{N}^*$. On a :

$$[L_1 = n] \cap [L_2 = k] = (P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) \sqcup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \cdots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1})$$

• Par union disjointe et indépendance il vient :

$$\begin{aligned}
P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) &= P(P_1) \times \cdots \times P(P_n) \times P(L_{n+1}) \times \cdots \times P(L_{n+k}) \times P(P_{n+k+1}) \\
&\qquad + P(F_1) \times \cdots \times P(F_n) \times P(P_{n+1}) \times \cdots \times P(P_{n+k}) \times P(F_{n+k+1}) \\
&= p^n q^k p + q^n p^k q
\end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) = p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k}$.

b. Notons que les événements $[L_1 = n]$ pour n décrivant $\mathbb{N}^*$ forment un système **quasi-complet** d'événements. Fixons k dans $\mathbb{N}^*$. La formule des probabilités totales affirme que :

$$\begin{aligned}
P(L_2 = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k \\
&\underbrace{=}_{correctement} q^k \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1} + p^k \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n+1} = q^k \frac{p^2}{1-p} + p^k \frac{q^2}{1-q}
\end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}}$.

c. Les séries $\sum_{k \geqslant 1} q^{k-1}$ et $\sum p^{k-1}$ convergent (série géométrique, p et q dans $]0,1[$). Par somme la série $\sum_{k \geqslant 1} P(L_2 = k)$ converge avec :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} + q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} p^{k-1} \\
&= p^2 \times \frac{1}{1-p} + q^2 \times \frac{1}{1-q} = p + q = 1
\end{aligned}$$

Comme les événements $[L_2 = 0]$, $[L_2 = +\infty]$ et $[L_2 = k]$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ forment un système complet d'événements, il vient de suite :

$$P(L_2 = 0) = P(L_2 = +\infty) = 0.$$

3. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. On a, comme précédemment :

$$\begin{aligned} P(L_3 = k) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} P(L_1 = i, L_2 = j, L_3 = k) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} p^i q^j p^k q + q^i p^j q^k p \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p^{i+k}\frac{q^2}{1-q} + q^{i+k}\frac{p^2}{1-p} = \sum_{i=1}^{+\infty} q^2 p^{i+k-1} + p^2 q^{i+k-1} \\ &= q^2\frac{p^k}{1-p} + p^2\frac{q^k}{1-q} = qp^k + pq^k \end{aligned}$$

Conclusion. $\boxed{L_3 \text{ suit la même loi que } L_1}$.

Partie 2 - Étude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

1. • N_1 est la variable certaine égale à 1 : $\boxed{N_1(\Omega) = \{1\},\ P(N_1 = 1) = 1 \text{ et } E(N_1) = 1}$.

• $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$. Puis $\{N_2 = 1\} = (P_1 \cap P_2) \sqcup (F_1 \cap F_2)$. Par union disjointe et indépendance on obtient :

$$P(N_2 = 1) = P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2) = P(P_1)\,P(P_2) + P(F_1)\,P(F_2) = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

Alors $P(N_2 = 2) = 1 - P(N_2 = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et il vient : $E(N_2) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Conclusion. On a $\boxed{N_2(\Omega) = \{1, 2\},\ P(N_2 = 1) = P(N_2 = 2) = \frac{1}{2} \text{ et } E(N_2) = \frac{3}{2}}$

• $N_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. Puis $\{N_3 = 1\} = (P_1 \cap P_2 \cap P_3) \sqcup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)$. Par union disjointe et indépendance on obtient :

$$\begin{aligned} P(N_3 = 1) &= P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) \\ &= P(P_1)\,P(P_2)\,P(P_3) + P(F_1)\,P(F_2)\,P(F_3) = \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Puis $\{N_3 = 3\} = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \sqcup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)$. Par union disjointe et indépendance on obtient :

$$\begin{aligned} P(N_3 = 3) &= P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3) \\ &= P(P_1)\,P(F_2)\,P(P_3) + P(F_1)\,P(P_2)\,P(F_3) = \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi $P(N_3 = 2) = 1 - P(N_3 = 1) - P(N_3 = 3) = \frac{1}{2}$.

Conclusion. On a donc $\boxed{P(N_3 = 1) = \frac{1}{4},\ P(N_3 = 2) = \frac{1}{2},\ P(N_3 = 3) = \frac{1}{4} \text{ et } E(N_3) = 2}$.

Remarque. On a $E(N_3^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{2}$ et $V(N_3) = E(N_3^2) - \big(E(N_3)\big)^2 = \frac{9}{2} - 2^2 = \frac{1}{2}$.

2. • Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Il est clair que $N_n(\Omega) \subset \{1, \dots, n\}$.

Si k est un élément pair de $\{1, \dots, n\}$ et si l'événement $P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k \cap F_{k+1} \cap \cdots \cap F_n$ se réalise alors l'événement $[N_n = k]$ se réalise.
Si maintenant k est un élément impair de $\{1, \dots, n\}$ et si l'événement $P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \cdots \cap P_{k-2} \cap F_{k-1} \cap P_k \cap P_{k+1} \cap \cdots \cap P_n$ se réalise alors l'événement $[N_n = k]$ se réalise.
On peut donc conclure que $\boxed{N_n(\Omega) = \{1, \dots, n\}}$.

• Puis on a $[N_n = 1] = (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n) \sqcup (F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n)$. Par union disjointe et indépendance on obtient :

$$\begin{aligned} P(N_n = 1) &= P(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n) + P(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) \\ &= P(P_1)\,P(P_2) \cdots P(P_n) + P(F_1)\,P(F_2) \cdots P(F_n) \end{aligned}$$

Ainsi $P(N_n = 1) = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

• Déterminons maintenant $P(N_n = n)$

— Supposons n pair. On a alors :

$$\begin{aligned} P(N_n = n) &= P\left((P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n) \sqcup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)\right) \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

— Supposons n impair. On trouve de suite : $P(N_n = n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Conclusion. $\boxed{\text{Si } n \text{ est un élément de } \mathbb{N}^*,\ P(N_n = 1) = P(N_n = n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}}$.

3. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in [0, 1]$.

Le **théorème de transfert** montre que $E(s^{N_n}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s^k P(N_n = k)$ donc $\boxed{E(s^{N_n}) = G_n(s)}$.

b) La fonction G_n est dérivable sur $[0, 1]$ (comme fonction polynôme) et pour tout $s \in [0, 1]$ on a :

$$G_n'(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)\, k\, s^{k-1}$$

Ainsi $\boxed{G_n'(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)\, k\, 1^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\, P(N_n = k) = E(N_n)}$.

c) Soient $n \geqslant 2$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$.

• Comme (P_{n-1}, F_{n-1}) est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne alors :

$$P([N_n = k] \cap P_n) = P([N_n = k] \cap P_n \cap P_{n-1}) + P([N_n = k] \cap P_n \cap F_{n-1})$$

Observons maintenant que : $[N_n = k] \cap P_n \cap P_{n-1} = [N_{n-1} = k] \cap P_n \cap P_{n-1}$
et $[N_n = k] \cap P_n \cap F_{n-1} = [N_{n-1} = k - 1] \cap P_n \cap F_{n-1}$.
Ainsi $P([N_n = k] \cap P_n) = P([N_{n-1} = k] \cap P_n \cap P_{n-1}) + P([N_{n-1} = k-1] \cap P_n \cap F_{n-1})$ et par indépendance il vient :

$$P([N_{n-1} = k] \cap P_n \cap P_{n-1}) = P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1})\, P(P_n) = \frac{1}{2}\, P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1})$$

De même on a :

$$P([N_{n-1} = k - 1] \cap P_n \cap F_{n-1}) = P([N_{n-1} = k - 1] \cap F_{n-1})\, P(P_n) = \frac{1}{2}\, P([N_{n-1} = k - 1] \cap F_{n-1})$$

et ainsi $\boxed{P\big((N_n = k) \cap P_n\big) = \dfrac{1}{2} P\big((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\big) + \dfrac{1}{2} P\big((N_{n-1} = k - 1) \cap F_{n-1}\big)}$.

• On peut montrer de la même manière que

$$\boxed{P\big((N_n = k) \cap F_n\big) = \frac{1}{2} P\big((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}\big) + \frac{1}{2} P\big((N_{n-1} = k - 1) \cap P_{n-1}\big)}$$

• (F_n, P_n) est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$$P(N_n = k) = P([N_n =] \cap P_n) + P([N_n = k] \cap F_n)$$

Il vient ainsi

$$P(N_n = k) = \frac{1}{2}\, P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}\, P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}\, P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}\, P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-$$

Or (P_{n-1}, F_{n-1}) est un système complet d'événements donc :

$$\frac{1}{2}\, P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}\, P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) = \frac{1}{2}\, P(N_{n-1} = k)$$

De même : $\dfrac{1}{2}\, P([N_{n-1} = k - 1] \cap F_{n-1}) + \dfrac{1}{2}\, P([N_{n-1} = k - 1] \cap P_{n-1}) = \dfrac{1}{2}\, P(N_{n-1} = k - 1)$.
Par conséquent :

$$\boxed{P(N_n = k) = \frac{1}{2}\, P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\, P(N_{n-1} = k - 1)}$$

d) Soient $n \geqslant 2$ et soit $s \in [0,1]$.

• D'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned}
G_n(s) &= \sum_{k=1}^{n} s^k P(N_n = k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} s^k P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} s^k P(N_{n-1} = k-1) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} s^k P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} s^k P(N_{n-1} = k-1) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} s^k P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n-1} s^{\ell+1} P(N_{n-1} = \ell) \quad \text{(changement d'indice } \ell = k-1\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} s^k P(N_{n-1} = k)}_{=G_{n-1}(s)} + \frac{s}{2}\underbrace{\sum_{\ell=1}^{n-1} s^{\ell} P(N_{n-1} = \ell)}_{=G_{n-1}(s)}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s)}$.

• On a $G_1(s) = sP(N_1 = k) = s$ et ce qui précède assure que la suite $G_n(s)$ est géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$ donc :

$$\boxed{G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} G_1(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s}$$

e) Soient n un élément de $\{2, \ldots, n\}$ et s dans $[0,1]$. On a : $G_n(s) = \left(1 + \frac{s}{2}\right)^{n-1} s$ donc

$$\begin{aligned}
G_n'(s) &= (n-1)\frac{1}{2}\left(1 + \frac{s}{2}\right)^{n-2} s + \left(1 + \frac{s}{2}\right)^{n-1} \\
&= (n-1)\frac{1}{2}\left(1 + \frac{s}{2}\right)^{n-2} \times 1 + \left(1 + \frac{s}{2}\right)^{n-1} = (n-1)\frac{1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

Notons que ceci vaut encore pour $n = 1$ car $E(N_1) = 1$.

Conclusion. On a $\boxed{E(N_n) = \frac{n+1}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

Partie 3 - Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

1. $f : x \to e^{-x}$ est de classe C^2 $\mathbb{R}$ et pour tout x réel on a $f''(x) = e^{-x} \geqslant 0$. Ainsi f est convexe. La courbe représentative de f est donc au-dessus de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 0. Ainsi pour tout x réel on a $f(x) \geqslant f'(0)(x-0) + f(0)$.

   Conclusion. $\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ on a } 1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}}$.

2. a) La série de terme général $P(A_i)$ est à termes positifs et divergente et il en va de même de la série $\sum_{i \geqslant k} P(A_i)$ donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty}$$

   b) • Soit $n \geqslant k$ entier. On a, d'après les formules de Morgan :

$$P(C_n) = 1 - P(\overline{C_n}) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=k}^{n} A_i}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=k}^{n} \overline{A_i}\right)$$

   Comme $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements indépendants, $(\overline{A_i})_{i \in \mathbb{N}^*}$ est encore une suite d'événements indépendants et ainsi

$$\boxed{P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})} \qquad (\heartsuit)$$

- Soit $n \geqslant k$ entier. Pour tout i dans $\{k, \ldots, n\}$, d'après la question 1, on a d'après la question 1 :

$$0 \leqslant P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) \leqslant \exp\left(-P(A_i)\right)$$

Par produit : $\displaystyle\prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}) \leqslant \prod_{i=k}^{n} \exp(-P(A_i)) = \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right)$

Ainsi, avec ($\heartsuit$), on obtient $\boxed{P(C_n) \geqslant 1 - \exp\big(-\displaystyle\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\big)}$.

- On a vu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty$ donc, par composition des limites, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right) = 0$$

Mais on a pour tout $n \geqslant k$ entier :

$$1 \geqslant P(C_n) \geqslant 1 - \exp\big(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\big)$$

Par sandwich, il vient : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1}$.

c) - Pour tout $n \geqslant k$ on a $C_n = \displaystyle\bigcup_{i=k}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=k}^{n+1} A_i = C_{n+1}$ donc $\boxed{C_n \subset C_{n+1}}$.

La suite $(C_n)_{n\geqslant k}$ est croissante pour l'inclusion : le théorème de convergence monotone affirme alors que l'on a

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1}$$

d) - On procède par double inclusion.

— Soit $i \geqslant k$ un entier. On a $A_i \subset \displaystyle\bigcup_{j=k}^{i} A_j = C_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Ceci étant vrai pour tout $i \geqslant k$ on a ainsi :

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

— Soit $\omega \in \displaystyle\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Il existe alors $m \geqslant k$ entier tel que $\omega \in C_m$.

Or $C_m = \displaystyle\bigcup_{i=k}^{m} A_i$ donc il existe un élément i_0 de $\{k, \ldots, m\}$ tel que $\omega \in A_{i_0}$.

Par conséquent $\omega \in \displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$ et ainsi $\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \supset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

On a donc $\boxed{\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n}$.

- On a alors $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n\right) = 1$.

3. Appelons P_n l'événement : « *obtenir PILE au n-ième lancer* ». L'indépendance des lancers donne l'indépendance des événements de la suite $(P_{2n} \cap P_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ donc de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puisque $A_n = P_{2n} \cap P_{2n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$ entier.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P(A_n) = P(P_{2n} \cap P_{2n+1}) = P(P_{2n})\,P(P_{2n+1}) = p^2$ donc la série de terme général $P(A_n)$ diverge grossièrement.
D'après la question précédente on a alors pour tout k dans $\mathbb{N}^*$:

$$P\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i\right) = 1$$

Ainsi la probabilité d'obtenir deux PILE consécutifs à partir du k-*ième* lancer vaut 1 pour tout k de $\mathbb{N}^*$.
Conclusion. $\boxed{\text{La probabilité d'avoir deux Piles consécutifs après un lancer fixé est 1}}$.