Exercice probabilités CCP 2022 avec un bonus

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.

On dit que la première série est de longueur $n \geqslant 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième l'autre côté.

De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.

On définit de même les séries suivantes.

Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « *le i-ième lancer amène Pile* » et F_i l'événement contraire. Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 - Étude des longueurs de séries.

1. On note L_1 la longueur de la première série.
   Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+1$.
   En déduire que $P(L_1 = n) = p^n q + q^n p$.

   Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1$. Qu'en déduire pour l'événement $[L_1 = +\infty]$?
2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.
   a. Exprimer l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+k+1$ puis calculer la probabilité de l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$.
   b. En déduire que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$
   c. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} P(L_2 = k)$ converge et déterminer sa somme. Qu'en déduire pour les événements $[L_2 = 0]$ et $[L_2 = +\infty]$?
3. On note L_3 la longueur de la troisième série. Déterminer la loi de L_3.

Partie 2 - Étude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

On considère dans toute cette partie que la pièce est **équilibrée, c'est-à-dire que** $p = \dfrac{1}{2}$.

On note N_n le nombre de séries **lors des n premiers lancers** :

— La première série est donc de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)$-ième l'autre côté et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce ;

— La dernière série se termine nécessairement au n-ième lancer.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : FFPPPPFFPPP…(F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1; \quad N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2;$$

$$N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3; \quad N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4;$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.

On admettra que N_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.
2. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par N_n) puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.
3. **Fonction génératrice de N_n.**
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0,1]$: $G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) s^k$.
   a) Pour $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.
   b) Que représente $G_n'(1)$?

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on a

$$P\big((N_n = k) \cap P_n\big) = \frac{1}{2} P\big((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\big) + \frac{1}{2} P\big((N_{n-1} = k-1\big) \cap F_{n-1}\big)$$

On admet que l'on obtiendrait de même

$$P\big((N_n = k) \cap F_n\big) = \frac{1}{2} P\big((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}\big) + \frac{1}{2} P\big((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}\big)$$

Montrer alors que $P(N_n = k) = \dfrac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \dfrac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1)$.

d) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s)$

Calculer $G_1(s)$ et en déduire que $G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s$

e) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.

Partie 3 - Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

1. Montrer que pour tout réel x on a $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$
2. On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(A_i)$ diverge. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geqslant k$, on note

$$C_n = \bigcup_{k \leqslant i \leqslant n} A_i = A_k \cup \cdots \cup A_n$$

a) Justifier que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty$

b) Montrer que $P(C_n) = 1 - \displaystyle\prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})$ puis que $P(C_n) \geqslant 1 - \exp\left(-\displaystyle\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right)$

En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 1$

c) Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1}. Que peut-on en déduire pour $P\big(\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\big)$?

d) Justifier que $\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$ et en déduire que : $P\big(\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\big) = 1$.

3. En considérant les événements A_n « *on obtient Pile au* $(2n)$*-ième et au* $(2n+1)$*-ième lancers* », montrer que la probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs est égale à 1.