

Exercice probabilités CCP 2019, une correction

Étude d'une marche aléatoire, une correction

Partie I - Calcul des probabilités

1. A l'instant 0, le pion est en A donc $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.
A l'instant 1, la probabilité qu'il reste en A est $\frac{1}{2}$ donc $p_1 = \frac{1}{2}$. Sinon, il se déplace de manière équiprobable sur l'un des deux autres points donc $q_1 = r_1 = \frac{1}{4}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, on a bien $V_1 = MV_0$ d'après ce qui précède. On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme (A_n, B_n, C_n) est un **système complet d'événements**, la **formule des probabilités totales** s'applique et donne :

$$\begin{aligned}
 P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n) \\
 &= P(A_n) \underbrace{P_{A_n}(A_{n+1})}_{=\frac{1}{2}} + P(B_n) \underbrace{P_{B_n}(A_{n+1})}_{=\frac{1}{4}} + P(C_n) \underbrace{P_{C_n}(A_{n+1})}_{=\frac{1}{4}} \\
 &= \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{1}{4}P(B_n) + \frac{1}{4}P(C_n)
 \end{aligned}$$

On raisonne de même pour exprimer b_{n+1} et c_{n+1} et on peut conclure que $V_{n+1} = MV_n$.

3. • Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on ait $V_n = M^n V_0$. Alors :

$$V_{n+1} = MV_n = M^{n+1}V_0.$$

Comme $V_0 = M^0 V_0$, on peut conclure par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $V_n = M^n V_0$.

- Avec l'expression de M^n admise par l'énoncé, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} p_n &= \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n} \\ q_n &= \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} \\ r_n &= \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} \end{cases}$$

4. Ces trois suites convergent vers $\frac{1}{3}$. Cela signifie que, si on observe la position du pion après un grand nombre d'étapes, il y a autant de chances qu'il soit en A , en B ou en C .

Partie II - Nombre moyen de passages en A

5. La variable aléatoire $S_n = X_1 + \dots + X_n$ compte le nombre de passage en A entre les temps 1 et n . Son espérance est donc le nombre moyen de passage en A entre le temps 1 et le temps n .
6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre p_k : son espérance est donc p_k .
7. Par linéarité de l'espérance, avec la notation introduite à la question 5 on a :

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \sum_{k=1}^n p_k.$$

Ainsi, toujours d'après la question 5, il vient :

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^k \right) \frac{n}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{4} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{n}{3} + \frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)
 \end{aligned}$$

Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en B

8. • Comme le pion est en A à l'instant 0, $(T_B = 1) = B_1$ d'où $P(T_B = 1) = \frac{1}{4}$.

• Puis on a

$$(T_B = 2) = \overline{B_1} \cap B_2 = (A_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap B_2)$$

Ces deux événements sont disjoints donc $P(T_B = 1) = P(A_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2)$.

Par définition d'une probabilité conditionnelle, $P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

De même $P(C_1 \cap B_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

Finalement, $P(T_B = 2) = \frac{3}{16}$.

9. A l'instant n , le pion est en A , en B ou en C donc $\overline{B_n} = A_n \cup C_n$.

• On a :

$$\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = (A_1 \cup C_1) \cap (A_2 \cup C_2) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap A_2) \cup (C_1 \cap C_2).$$

En prenant l'intersection avec B_3 on obtient 4 événements deux à deux disjoints donc

$$P(B_3 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(B_3 \cap A_1 \cap A_2) + P(B_3 \cap A_1 \cap C_2) + P(B_3 \cap C_1 \cap A_2) + P(B_3 \cap C_1 \cap C_2).$$

Puis :

$$P(B_3 \cap A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2)P_{A_1 \cap A_2}(B_3) = P(A_1 \cap A_2)P_{A_2}(B_3)$$

car la position à l'instant 3 ne dépend que la position à l'instant 2.

Ainsi $P(B_3 \cap A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}P(A_1 \cap A_2)$.

• On procède de même avec les 3 autres termes puis on se retrouve avec la somme de 4 probabilités d'événements incompatibles. On utilise la relation du début de cette question pour conclure :

$$P(B_3 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \frac{1}{4}P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$$

Avec la définition d'une probabilité conditionnelle, $P_{\overline{B_1} \cap \overline{B_2}}(B_3) = \frac{1}{4}$.

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a : $(T_B = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i} \right) \cap B_k$.

Avec la définition d'une probabilité conditionnelle et le résultat admis, il vient :

$$P(T_B = k) = \frac{1}{4}P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right).$$

Mais $\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i} = (T_B \geq k) = (T_B = k) \cup (T_B \geq k+1)$ donc

$$P(T_B = k) = \frac{1}{4}(P(T_B = k) + P(T_B \geq k+1)) = \frac{1}{4}(P(T_B = k) + 4P(T_B = k+1))$$

d'où $P(T_B = k+1) = \frac{3}{4}P(T_B = k)$.

De plus $P(T_B = 1) = \frac{1}{4}$ donc : $P(T_B = k) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^{k-1}$.

• Comme $(T_B = k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements il vient

$$P(T_B = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_B = k) = 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}}$$

Par conséquent, $P(T_B = 0) = 0$.

12. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $P(T_B = k) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4} \right)^{k-1}$. Ainsi T_B suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$. On en déduit que T_B admet une espérance et $E(T_B) = 4$.