A propos des polynômes orthogonaux

Dans tout le problème, a et b sont deux réels avec $a < b$ et $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive et qui ne s'annule qu'en un nombre fini de points. Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on note :

$$(P|Q)_w = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)dt$$

On appelle suite (ou famille) w -**orthogonale échelonnée** une suite (P_n) de $\mathbb{R}[X]$ telle que :

- (1) Pour tout n , P_n est de degré n .
- (2) Pour tous entiers naturels $m \neq n$, $(P_n|P_m)_w = 0$.

Le but du problème est de justifier l'existence de telles familles et de montrer la plupart de leurs (sympathiques) propriétés usuelles.

Partie A

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto (P|Q)_w$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, dont la norme associée sera notée $\|P\|_w = \sqrt{(P|P)_w}$.
Justifier que pour tous polynômes P, Q et R on a : $(PQ|R) = (P|QR)$.
2. Justifier l'existence d'une suite w -orthogonale échelonnée.
3. Justifier que toute suite w -orthogonale échelonnée est une base de $\mathbb{R}[X]$.
4. Soient $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux familles w -orthogonales échelonnées. Montrer que pour tout entier n , les polynômes P_n et Q_n sont colinéaires.

Dans la suite de cette partie, on se fixe $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite w -orthogonale échelonnée. Pour tout $n \geq 1$, on note (a_n, b_n) l'unique couple de réels tels que $P_n - a_n X^n - b_n X^{n-1}$ soit de degré inférieur ou égal à $n - 2$. On pose $(a_0, b_0) = (P_0(0), 0)$.

5. Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout Q tel que $\deg Q \leq n - 2$ on a $(XP_n|Q)_w = 0$.
6. En déduire qu'il existe un unique couple (α_0, β_0) et pour tout $n \geq 1$ un unique triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ tels que :

$$XP_0 = \alpha_0 P_1 + \beta_0 P_0 \quad \text{et} \quad XP_n = \alpha_n P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}$$

7. démontrer que pour $n \geq 1$ on a :

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \quad \text{et} \quad \gamma_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{\|P_n\|_w^2}{\|P_{n-1}\|_w^2}$$

8. **Exemple :** Les **polynômes de Tchébychev de seconde espèce** sont définis de manière unique par la relation :

$$P_n(\cos x) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in]0, \pi[\quad (\clubsuit)$$

- a. Déterminer P_0, P_1, P_2 .
On ne demande pas de justifier l'existence de P_n pour tout n pour l'instant. Il suffit donc de trouver ceux qui marchent pour $n \leq 2$.
- b. Justifier l'existence et de l'unicité de P_n vérifiant $(\clubsuit)$ pour tout n entier naturel.
- c. Exprimer, pour tout entier $n \geq 2$, $\sin(n+2)x$ en fonction de $\sin(n+1)x$ et $\sin nx$. En déduire une formule de récurrence du même type que celle de la question 6 pour cette famille.
- d. Montrer que cette famille est une suite w -orthogonale échelonnée pour la fonction :

$$w = \left(\begin{array}{ll} [-1, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt{1-x^2} \end{array} \right)$$

Indication : on pourra utiliser le judicieux changement de variable $t = \cos \theta$ dans l'intégrale définissant $(P_n|P_m)_w$.

Partie B - Racines des polynômes orthogonaux

On veut maintenant montrer que toute suite w -orthogonale échelonnée est composée de polynômes scindés à racines simples dont toutes les racines appartiennent à $[a, b]$.

9. Justifier que les polynômes de Tchébychev sont scindés à racines simples appartenant à $[-1, 1]$. On donnera notamment ces racines rangées par ordre croissant.
10. Soit maintenant $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille w -orthogonale échelonnée quelconque et $n \geq 1$ un entier. Soit p le nombre de racines distinctes de P_n dans $[a, b]$ et de multiplicité impaire. On note $r_1, \dots, r_p$ ces racines, et enfin on pose

$$R = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$$

- a. Justifier qu'il existe Q de signe constant sur $[a, b]$ tel que $P_n = QR$.
 - b. Montrer que si $p < n$, alors $(P_n | R)_w = 0$.
 - c. Conclure.
11. Avec les notations de la question précédente, montrer que pour tout entier n , les polynômes P_{n+1} et P_n n'ont pas de racine commune.

Indication : raisonner par l'absurde et utiliser le résultat de la question 6 en justifiant que P_0 n'a aucune racine.

FIN DE L'ÉNONCÉ