Devoir supplémentaire : deux exercices CCINP sur le bilinéaire

Exercice 1 - Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt.$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.
2. Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1}\mathrm{e}^{-t}dt.$$

4. Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.
7. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in \{0, \ldots, n\}\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in \{0, \ldots, n\}$.

8. Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
10. Justifier que P_k est de degré k.
11. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.
13. En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.
14. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \ldots, x_n$.
On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

15. Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

16. En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$
17. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}dt \neq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

Exercice 2 - Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

On suppose que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note G_n la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G_n = \left((X^{i-1}|X^{j-1})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} (1|1) & (1|X) & \cdots & (1|X^n) \\ (X|1) & (X|X) & \cdots & (X|X^n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X^n|1) & (X^n|X) & \cdots & (X^n|X^n) \end{pmatrix}.$$

On cherche à obtenir une expression du déterminant de G_n à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.

Parties A - Définition et propriétés d'un système orthogonal

Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, on appelle système orthogonal toute suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

— $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j \Rightarrow (P_i|P_j) = 0$;

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire et de degré n.

Dans tout l'exercice, on considère un système orthogonal $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg P < n$. Montrer que $(V_n|P) = 0$.
3. Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un autre système orthogonal. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = V_n$.

Parties B - Expression de $\det G_n$ à l'aide de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit G'_n la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G'_n = \Big((V_{i-1}|V_{j-1})\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} (V_0|V_0) & (V_0|V_1) & \cdots & (V_0|V_n) \\ (V_1|V_0) & (V_1|V_1) & \cdots & (V_1|V_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (V_n|V_0) & (V_n|V_1) & \cdots & (V_n|V_n) \end{pmatrix}.$$

On note $Q_n = (q_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ la matrice de la famille $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Montrer que Q_n est triangulaire supérieure et que $\det Q_n = 1$.
5. Montrer que $Q_n^T G_n Q_n = G'_n$, où Q_n^T est la transposée de la matrice Q_n.
6. En déduire que $\det G_n = \displaystyle\prod_{i=0}^{n} \|V_i\|^2$.