Polynômes d'Hermite...

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre

Le problème traite de quelques propriétés des polynômes de HERMITE qui constituent une famille orthogonale pour un certain produit scalaire qui sera étudié dans ce problème.

On notera $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$) l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels (resp. l'espace vectoriel des des polynômes de degré inférieur ou égal à n)y compris le polynôme nul.

Pour tout entier naturel k le polynôme X^k se confond avec la fonction polynomiale réelle $x \mapsto x^k$, en particulier X^0 est la fonction constante égale à 1.

Enfin on rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ ainsi que (par extrême gentillesse) la formule de TAYLOR avec reste intégral : pour $f \in C^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$ (où $a < b$ sont des réels) on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Partie 1

Trois résultats utiles pour la suite

1. a. Pour tout entier naturel n , justifier la convergence de l'intégrale :

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- b. Etablir pour tout entier $n \geq 2$ l'égalité : $I_n = (n-1)I_{n-2}$.

- c. Soit n un entier naturel. Donner la valeur de I_{2n+1} et démontrer que $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

- d. Pour toute fonction polynomiale P , justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

2. Soit C un réel positif. Pour tout entier naturel n on pose : $u_n = \frac{C^n}{E(\frac{n}{2})!}$ où E désigne la fonction partie entière.

- a. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C^{2n}}{n!}$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

- b. Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} u_{2k} + u_{2k+1}$ converge et déterminer sa somme.

- c. En déduire la convergence de la série de terme général u_n ainsi que la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

3. **Une condition suffisante de développement en série entière.**

Soit a un réel strictement positif et soit g une fonction réelle indéfiniment dérivable sur $[-a, a]$ pour laquelle il existe un réel positif K tel que, pour tout entier n on ait :

$$\max_{t \in [-a, a]} |g^{(n)}(t)| \leq \frac{K^n n!}{E(\frac{n}{2})!}$$

- a. Démontrer que pour tout $\lambda \in [-a, a]$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda \frac{(\lambda - t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) dt = 0$
b. En déduire l'égalité suivante, valable pour tout $\lambda \in [-a, a]$:

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n$$

Quelle simplification obtient-on si g coïncide sur $[-a, a]$ avec une fonction polynomiale de degré d ?

Partie 2

Les polynômes d'HERMITTE

1. Démontrer que l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} P(x)Q(x) dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ce produit scalaire dans la suite. La norme associée sera notée $\| \cdot \|$.

Si n est un entier naturel la restriction de ce produit scalaire aux polynômes de degré au plus n fait de $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

2. A l'aide de la base $(1, X, X^2, X^3)$ construire une base orthogonale de $(\mathbb{R}_3[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ formé de polynômes unitaires (i.e. dont le coefficient de plus haut degré est égal à 1).

Dans la suite du problème on note $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout x réel par :

$$\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Pour tout entier naturel n on considère l'application $H_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout x réel par :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \psi^{(n)}(x)$$

où selon l'usage $\psi^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième de l'application ψ (en particulier $\psi^{(0)} = \psi$).

3. a. Pour tout x réel calculer $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$.
b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir les relations :

$$(1) \quad H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1}$$

$$(2) \quad H'_n = nH_{n-1}$$

Pour établir (1) on pourra remarquer que $\psi^{(n+1)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} (-x\psi(x))$ pour tout x réel.

- c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction H_n est polynomiale. On précisera le degré de H_n en fonction de n ainsi que sa parité et son coefficient de plus haut degré.
4. **Informatique.** Un polynôme de degré n est assimilé à une liste de $n + 1$ scalaires. Le premier élément de cette liste est le coefficient de X^0 , le second, celui de X^1 et ainsi de suite.

- a. Écrire fonction Python qui stocke dans Q les coefficients du polynôme XP , P étant de degré au plus 19.
- b. Écrire une fonction Python `HERMITE(n,H)` qui, étant donné un entier n , $2 \leq n \leq 20$, stocke les coefficients de H_n dans une liste.

Partie 3

$(H_n)_{n \geq 0}$ comme famille de polynômes orthogonaux

1. a. Démontrer que si P est un polynôme et $n \in \mathbb{N}^*$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)\psi^{(n-1)}(x) = 0$. De même on montrerait et **on admet** que $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)\psi^{(n-1)}(x) = 0$.
- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ calculer

$$\langle H_n, H_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Pour n non nul on utilisera la définition de H_n .

- c. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. En remarquant que $\langle H_n, H_m \rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\psi^{(n)}(x) dx$ et à l'aide d'une intégration par partie que l'on effectuera avec soin, démontrer que :

$$\langle H_n, H_m \rangle = m \langle H_{n-1}, H_{m-1} \rangle$$

En déduire que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ que vaut $\langle H_n, H_n \rangle$?

2. a. Soit k dans $\mathbb{N}$ et R une fonction polynomiale de degré au plus k . Déterminer $\langle H_{k+1}, R \rangle$.
- b. Soient n un entier naturel, k un entier vérifiant $0 \leq k \leq n$ et P un polynôme de degré au plus k . Etablir l'égalité :

$$\|X^{k+1} - P\|^2 = \|H_{k+1}\|^2 + \|Q - P\|^2$$

où $Q = X^{k+1} - H_{k+1}$. On pourra calculer $\langle H_{k+1}, Q - P \rangle$.

Quelle est, dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}_{n+1}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, la projection orthogonale de X^{k+1} sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$?

- c. On note $(G_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ la famille orthonormale de $(\mathbb{R}_{n+1}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ obtenue par le procédé de GRAM-SCHMIDT à partir de $(X^k)_{0 \leq k \leq n+1}$. Pour tout k dans $\{0, \dots, n+1\}$, déterminer G_k en fonction de $H_0, H_1, \dots, H_{n+1}$.

Partie 4

Un développement en série de Hermitte

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier l'égalité suivante : $P = \sum_{k=0}^n \langle P, H_k \rangle \frac{H_k}{k!}$.
2. Pour tout couple (b, c) de réels vérifiant $b \leq c$ on **admet** qu'il existe un réel K (dépendant de b et c) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [b, c]$ on ait :

$$\left| \frac{H_n(x)}{n!} \right| \leq \frac{K^n}{E(\frac{n}{2})!}$$

- a. Soit x un réel donné. A l'aide du 2 de la partie 1 établir, pour tout réel λ , la convergence de la série de terme général $\frac{H_n(x)}{n!} \lambda^n$.
- b. Soit g_x (x est toujours un réel fixé) la fonction définie pour tout réel λ par $g_x(\lambda) = e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{2}}$.
 Pour tout réel λ et tout entier naturel n calculer $g_x^{(n)}(\lambda)$ (c'est-à-dire $\frac{d^n g_x}{d\lambda^n}(\lambda)$) en fonction de H_n .
 Montrer que g_x vérifie les hypothèses du 3 de la partie 1 et en déduire que pour tout $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \lambda^n$$

- c. On note $\exp$ la fonction exponentielle. Pour tout entier naturel n , justifier rapidement de la convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

dont, par analogie, on note $\langle \exp, H_n \rangle$ la valeur. Déterminer $\langle \exp, H_n \rangle$ puis, pour tout x réel, conclure à l'égalité :

$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \exp, H_n \rangle \frac{H_n(x)}{n!}$$

Pour calculer $\langle \exp, H_n \rangle$ on pourra utiliser la définition de H_n et intégrer par parties (avec soin) afin d'obtenir $\langle \exp, H_n \rangle = \langle \exp, H_{n-1} \rangle$.

FIN DE L'ÉNONCÉ