Presque tout sur la fonction Gamma

Le but de ce problème est de s'intéresser à plusieurs propriétés de la fonction Γ.

Partie I - Premières propriétés et prolongement de Γ

On note $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ où $\mathbb{Z}^-$ désigne l'ensemble des entiers relatifs négatifs (au sens large...). On dira qu'une fonction f définie sur $D \subset \mathbb{R}$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ lorsque :

- $(\mathcal{P}_1)$: $1 \in D$ et $f(1) = 1$.
- $(\mathcal{P}_2)$: pour tout $x \in D$ on a $x + 1 \in D$.
- $(\mathcal{P}_3)$: pour tout $x \in D$ on a $f(x+1) = xf(x)$.

1. a. Démontrer que si f est une fonction qui vérifie $\mathcal{P}$ alors $D \cap \mathbb{Z}^- = \emptyset$.

   b. Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(n) = (n-1)!$. Démontrer que f a la propriété $(\mathcal{P})$.

2. Déterminer l'ensemble D_Γ des réels x tels que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. Pour x dans D_Γ on pose :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

   a. Démontrer que Γ a la propriété $(\mathcal{P})$.

   b. Démontrer que pour tout x dans D_Γ et tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a :

$$\Gamma(x+n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)\right)\Gamma(x)$$

3. Pour tout $x \in E$ et n dans $\mathbb{Z}$ tel que $x + n \in D_\Gamma$ on pose :

$$A_n(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)}$$

   a. Démontrer que pour tout $x > 0$ et tout $n > 0$ entier, $A_n(x)$ est indépendant de n.

   b. Soit $x \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^-$. Démontrer qu'il existe N_x entier tel que pour tout $n \geqslant N_x$ on ait $x + n > 0$.
   Soient n et p dans $\mathbb{N}$. Pour $n > N_x$ démontrer que :

$$A_{n+p}(x) = A_n(x)$$

   c. Soit x dans E. Pour $n > N_x$ on pose $\widetilde{\Gamma}(x) = A_n(x)$.
   Démontrer que $\widetilde{\Gamma}$ a la propriété $(\mathcal{P})$, puis que pour tout $x > 0$ on a $\widetilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x)$ et enfin que pour tout x dans E on a :

$$\widetilde{\Gamma}(x+n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)\right)\widetilde{\Gamma}(x)$$

On dit que la fonction $\widetilde{\Gamma}$ prolonge Γ à E. On notera Γ à la place de $\widetilde{\Gamma}$ dans la suite du sujet.

Partie II - Fonction B, étude asymptotique et régularité

4. Soit $n \geqslant 1$.
   a. Démontrer que pour tout x dans $[0,1[$ on a : $\ln(1-x) \leqslant -x$.
   En déduire que pour tout t dans $[0,n]$ on a : $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
   b. Soit $\varphi : [0,\sqrt{n}[\to \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(t) = \ln\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right) - t - n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right)$. Etudier les variations de φ et établir que pour tout $t \in [0,n[$ on a :
   $$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$$
   c. Pour tout t dans $[0,n[$ justifier les inégalités : $\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. En déduire que pour tout $x>0$ on a : $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \quad (\clubsuit)$
5. Soient $x>0$ et $y>0$. On pose $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.
   a. Démontrer que l'intégrale impropre $B(x,y)$ converge et justifier que $B(x,y) = B(y,x)$.
   b. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $B(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}B(x,y)$.
   c. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ entier on a $B(x,n+1) = \dfrac{n}{x}B(x+1,n)$ puis que :
   $$B(x,n+1) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$
   d. Par un changement de variable adéquate (note [1]) et à l'aide de $(\clubsuit)$, démontrer que :
   $$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x B(x,n+1)$$
   e. Démontrer que pour tout $x>0$ on a :
   $$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$
   En déduire que pour tout $x>0$ on a $\Gamma(x+n) \underset{+\infty}{\sim} n^x(n-1)!$.
   f. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose $\lambda_n = \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$. Démontrer que $\lambda_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n}}$.
6. Etablir que la fonction Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et déterminer Γ'.

Partie III - La fonction $\ln\Gamma$

7. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose : $\gamma_n = -\ln n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
   a. Etablir que pour tout $n \geqslant 2$ entier on a :
   $$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$
   et en déduire que pour tout $n \geqslant 1$ entier on a $\gamma_n \in]0,1]$.

1. comme Sheila...

b. Démontrer que la suite (γ_n) converge. On note γ sa limite.

8. a. Pour tout réel x strictement positif, et pour tout entier n strictement positif, montrer l'égalité :

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right]=\exp(-x\gamma_n)\times\frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{n^x n!}$$

b. On pose $v_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right]$. Montrer que la suite $\big((v_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

On note $\ell(x)$ sa limite. Montrer la relation :

$$\ell(x)=\frac{\exp(-\gamma x)}{x\Gamma(x)}$$

9. a. Soit x un réel strictement positif fixé.

Montrer que la série de terme général $\frac{x}{n}-\ln\big(1+\frac{x}{n}\big)$, $n\geqslant 1$, est convergente.

b. Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité :

$$\ln\big(\ell(x)\big)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]$$

En déduire, pour tout réel x strictement positif, la relation :

$$\ln\big(\Gamma(x)\big)=-\gamma x-\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]$$

10. Soit ψ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\psi(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[\ln\big(\Gamma(x)\big)\big]$.

Établir, pour tout réel x strictement positif l'égalité : $\psi(x+1)=\psi(x)+\frac{1}{x}$.

Déterminer un équivalent simple de $\psi(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la formule :

$$\psi(n)=\psi(1)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

11. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère la fonction U_n définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$U_n(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}$$

On désigne par $A(x)$ la somme de la série de terme général $U_n(x)$.

a. Montrer que A est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. En particulier, exprimer, pour tout réel x strictement positif, $A'(x)$ et $A''(x)$ en fonction de $\Gamma(x)$, $\Gamma'(x)$ et $\Gamma''(x)$.

b. Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, la série de terme général $U_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente. Dans toute la suite du problème, **on admet** les deux résultats suivants : pour tout réel x strictement positif on a

$$A'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n'(x)\quad\text{et}\quad A''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n''(x)$$

12. Calculer $\psi(1)$ en fonction de γ. En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty}\big(\ln n-\psi(n)\big)$.

13. On veut établir dans cette question que pour tout réel y strictement positif, on a $\psi'(y) > \dfrac{1}{y}$.
Soit x un réel strictement positif fixé. On considère la fonction G définie sur $]0, +\infty[$ qui, à tout réel t strictement positif, associe $G(t) = \dfrac{1}{(t+x)^2}$.

a. Montrer que sur $]0, +\infty[$, G est positive, strictement décroissante, et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b. En déduire la double inégalité : $0 < \displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)\,\mathrm{d}t < \sum_{k=1}^{\infty} G(k)$.

c. Établir l'inégalité : $\psi'(x) > \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2}$. Conclure.

Fin de l'énoncé
