Problème. **Autour du théorème d'Abel pour les séries entières**
Une correction

Partie I - Généralités

1. a) Il suffit de considérer : $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n$

   b) Il suffit de considérer $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

   c) On prend par exemple $f_n : x \mapsto x^n$. Comme la suite de fonctions continue (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $]-1,1[$, puisque $f_n(1-\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1}$, la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge donc pas uniformément sur $]-1,1[$.

2. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$ on a : $|f_n(x)| \leqslant |a_n|$ donc $\|f_n\|_{\infty,[-1,1]} \leqslant |a_n|$. Ainsi, comme la série $\sum a_n$ est absolument convergente, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1,1]$. Comme chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[-1,1]$, en particulier elle est continue en 1 donc :

$$\lim_{x\to 1^-} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)}_{=f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

   Remarque. Il est aussi possible d'utiliser le théorème de la double limite.

3. ***Exemple***

   a) Pour $x \in]-1,1[$ on a : $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, et ainsi il vient :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} - x = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^n}{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} - x \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^n}{n-1} - \frac{x^n}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n \end{aligned}$$

   b) On a $\left|\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| \sim \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ converge absolument. D'après la question 2, on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \lim_{x\to 1^-} g(x) = 2\ln 2 - 1.$$

Partie II - Théorème d'Abel et applications

4. **Théorème d'Abel**

a) Comme $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$ on a : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}(r_{n+p-1} - r_{n+p})x^{n+p} = R_n(x)$.

b) Pour éviter des problèmes de convergence, on va travailler avec les sommes partielles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $N \geqslant 2$ entier on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{N}(r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} &= \underbrace{\sum_{p=1}^{N} r_{n+p-1}\, x^{n+p}}_{\text{changement d'indice } k=p-1} - \sum_{p=1}^{N} r_{n+p}\, x^{n+p} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} r_{n+k}\, x^{n+k+1} - \sum_{p=1}^{N} r_{n+p}\, x^{n+p} \\
&= r_n\, x^{n+1} + \sum_{p=1}^{N-1} r_{n+p} \underbrace{\left(x^{n+p+1} - x^{n+p}\right)}_{=x^{n+1}(x-1)x^{p-1}} - r_{n+N}\, x^{n+N} \\
&= r_n\, x^{n+1} + x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{N-1} r_{n+p}\, x^{p-1} - r_{n+N}\, x^{n+N}
\end{aligned}$$

Comme la suite $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée par 1 et comme $r_m \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ (reste d'une série convergente), on a :

$$r_{n+N}\, x^{n+N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En faisant tende N vers $+\infty$, avec la question 4a, il vient correctement :

$$R_n(x) = r_n\, x^{n+1} + x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p}\, x^{p-1}.$$

Commentaire : on peut noter que cette égalité est aussi valable pour $x = 1$.

c) Soit $\varepsilon > 0$.

• Comme $r_m \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, on dispose d'un entier n_0 tel que pour tout $k \geqslant n_0$ on ait $|r_k| \leqslant \varepsilon/2$; alors on a bien pour tout $n \geqslant n_0$ et $p \in \mathbb{N}$ entier : $|r_{n+p}| \leqslant \varepsilon/2$.

• Et pour $x \in [0,1[$ et $n \geqslant n_0$ on obtient par inégalité triangulaire, comme $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant 1$:

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leqslant r_n + |x-1|\sum_{p=1}^{+\infty} |r_{n+p}|\, x^{p-1} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{p=1}^{+\infty} x^{p-1} = \varepsilon
\end{aligned}$$

et si $x = 0$, $|R_n(x)| = |r_n| \leqslant \varepsilon$.

d) D'après la question précédente $R_n \xrightarrow[[0,1]]{CU} 0$. Avec le fait que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$, on peut affirmer qu'elle converge uniformément sur $[0,1]$ et ainsi la fonction somme est continue sur $[0,1]$:

$$f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

5. Par contraposition, si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, la série $\sum a_n$ diverge.

6. ***Exemple***
La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge (critère spécial des séries alternées) et pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}.$$

Le théorème d'Abel s'applique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

7. ***Exemple***
a) Par primitivation du développement de $\dfrac{1}{1+x^2}$, on obtient pour $x \in]-1,1[$:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

b) Comme la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge (par critère spécial des séries alternées), le théorème d'Abel s'applique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1^-} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

8. ***Application***
a) i) Les séries $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n$ convergent par application immédiate du critère spécial des séries alternées.

ii) La fonction $\varphi : x \mapsto x(n+2-x)$ est maximale en $\dfrac{n+2}{2}$. En particulier, pour tout $k \in \{0, \ldots, n+1\}$ on a :

$$\varphi(k+1) = (k+1)(n-k+1) \leqslant \varphi\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{(n+2)^2}{4}.$$

iii) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{((k+1)(n-k+1))^{1/4}},$$

et ainsi $|w_n| \geqslant 4(n+1)\dfrac{1}{(n+2)^{1/2}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Il en résulte que la série $\sum w_n$ diverge grossièrement.

b) On considère les séries entières $\sum u_n x^n$, $\sum v_n x^n$ et $\sum w_n x^n$. Par hypothèse, le rayon de convergence de toutes ces séries entières est supérieur à 1. On note alors pour $x \in]-1,1[$:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n,\ V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \ \text{ et } \ W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n.$$

Par produit de Cauchy de séries entières, pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$W(x) = U(x)V(x).$$

En faisant tendre x vers 1^-, on obtient avec le théorème d'Abel :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Partie III - Une réciproque partielle du théorème d'Abel

9. La réciproque du théorème d'Abel est fausse : il suffit de prendre la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $a_n = (-1)^n$.

10. a) Pour tout $x \in [0,1[$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_n x^n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$.
Comme la fonction f est positive et croissante sur $[0,1[$, elle admet une limite en 1^- et, par passage à la limite dans l'inégalité précédente, il vient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \lim_{x\to 1^-} f(x)$

b) On suppose que la suite (a_n) vérifie les propriétés $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$. Ainsi : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
La question précédente permet de dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \ell.$$

Ainsi les sommes partielles de **la série à termes positifs** $\sum a_n$ sont majorées : cette série est convergente. La suite (a_n) vérifie donc la propriété $(\mathcal{P}_1)$.

Partie IV - Séries harmoniques transformées

11. On rappelle que si $(a_n)_n$ est une suite numérique alors les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum |a_n|\, x^n$ ont même rayon de convergence.
Soit maintenant $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels tels que $\varepsilon_n \in \{-1;1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les rayons de convergence des séries entières $\sum \varepsilon_n x^n)$ et $\sum x^n)$ sont égaux et de valeur 1.
Il en va de même pour les séries entières $\displaystyle\sum \frac{\varepsilon_n}{n} x^n)$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n} x^n)$.

Dans la suite, pour $x \in]-1,1[$, $\quad \displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n \quad$ et $\quad \displaystyle g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n$.

On remarque que $\displaystyle f(x) = \int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t$ pour tout $x \in]-1;1[$.

12. • Si la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge, alors par le théorème d'Abel, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

• Réciproquement, supposons que $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Comme $\frac{\varepsilon_n}{n} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ car $|\varepsilon_n| = 1$, le théorème de Littlewood s'applique. La série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge donc et :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

13. Comme $(\varepsilon_n)_n$ est périodique de période p, on alors pou $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x^{n-1} = \varepsilon_1 x^0 + ... + \varepsilon_p x^{p-1} + \varepsilon_1 x^p + ... + \varepsilon_p x^{2p-1} + \varepsilon_1 x^{2p} + ... \\
&= \varepsilon_1 \sum_{k=0}^{\infty} x^{kp} + \varepsilon_2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{kp+1} + ... + \varepsilon_p \sum_{k=0}^{\infty} x^{kp+p-1} == \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i x^{i-1} \sum_{k=0}^{\infty} x^{kp} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} \varepsilon_i x^{i-1}}{1-x^p}
\end{aligned}$$

Donc l'expression de $g(x)$ est une fraction rationnelle en x .

14. On prend (ε_n) périodique de période 2 avec : $\varepsilon_1 = -1$ et $\varepsilon_2 = +1$ (ici $p = 2$), Donc $\varepsilon_n = (-1)^n$ pou tout $n \in \mathbb{N}^*$ et par la question 11. la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \int_0^x g(t)dt$. Or, d'après la question 12. : $g(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2} \varepsilon_i x^{i-1}}{1-x^2} = \frac{-1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} = -\frac{1}{x+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$ et donc $f(x) = \int\limits_0^x g(t)dt = -\ln(1+x)$. Puisque $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\ln(2)$, on en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

On prend cette fois-ci $\varepsilon_n = 1$, ((ε_n) est périodique de période $p = 1$), alors $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ et $f(x) = \int_0^x g(t)dt = -\ln(1-x)$ et puisque $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, alors $\sum \frac{1}{n}$ diverge .

15. D'après la question 12. $g(x)$ est une fraction *rationnelle* en x : $g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} \varepsilon_k x^{k-1}$ et $Q(x) = 1 - x^p = (1-x)\sum\limits_{k=0}^{p-1} x^k$

On a $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existe dans R si et seulement si $\int_0^1 g(t)dt$ converge .

On sait que g est continue sur $[0,1[$ (somme d'une série entière) et qu'au voisinage de 1, on a : $Q(x) \sim p(1-x)$ et $\lim_{x\to 1} P(x) = P(1) = \sum\limits_{k=1}^{p} \varepsilon_k$. Si $P(1) \neq 0$, alors $g(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{P(1)}{p(1-x)}$

et $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ diverge.

Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k = P(1) = 0$ alors $g(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{P'(1)}{p}$ et g admet donc un prolongement par continuité en 1, et donc $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ converge .

Conclusion : $\sum \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k = 0$.

Si p est impair alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k \neq 0$ car $\varepsilon_n \in \{-1;1\}$ et par suite la série $\sum \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ diverge .

16. **Exemple :**

Ici $p = 6$ avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ et $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = -1.$, on a alors $P(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} \varepsilon_k = 0$, et donc par la question 14. la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge *et* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x g(t)dt$.

Or pour $x \in [0,1[$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1+x+x^2-x^3-x^4-x^5}{1-x^6} \\ &= \frac{(x^2+x+1)(1-x^3)}{(x^3+1)(1-x^3)} = \frac{x^2+x+1}{x^3+1} \\ &= \frac{x^2+x+1}{(x+1)(1-x+x^2)} = \frac{1}{1-x+x^2} + \frac{x^2}{1+x^3} \end{aligned}$$

puisque :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t &\overset{u=2t-1}{=} \int_{-1}^{2x-1} \frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}u^2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \int_{-1}^{2x-1} \frac{2}{3+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(-\frac{\sqrt{3}}{3}) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) \end{aligned}$$

et $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^3}dt = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{d(1+t^3)}{1+t^3} = \frac{1}{3}\ln(1+x^3)$, on a $f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{1}{3}\ln(1+x^3)$ pour tout $x \in [0,1[$ et puis $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{1}{3}\ln(2) = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi + \frac{1}{3}\ln 2$,

Conclusion. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{1}{3}\ln(2) = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi + \frac{1}{3}\ln 2.$