Devoir n° 5

Pour le lundi 9 décembre

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées.*
Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.
Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Dans tout le problème on note :
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout f dans E on appelle transformée de LAPLACE de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Partie I - Exemples et propriétés

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout x dans $[a, +\infty[$ on pose :
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
On considère les propositions suivantes :
   (i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
   (ii) F admet une limite finie en $+\infty$.
   Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :
   a) f est positive sur $[a, +\infty[$;
   b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.
2. a) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
   b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   c) Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
3. a) On considère la fonction $\mathcal{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.
   b) Soit $\lambda \geqslant 0$ réel. On considère la fonction $h_\lambda : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \geqslant 0$ réel par : $h_\lambda(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.
4. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. Soit la fonction $g_n^{(f)} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour $t \geqslant 0$, par $g_n^{(f)}(t) = t^n f(t)$.
   a) Soit $x > 0$. Démontrer qu'il existe $A_x \geqslant 0$ tel que pour tout $t \geqslant A_x$ on ait $t^n\mathrm{e}^{-tx} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$.
   b) Démontrer que $g_n^{(f)}$ est un élément de E.
5. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
   Soit f dans E de classe C^1, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que, pour tout x dans $]0, +\infty[$, on a :
$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$
6. **Régularité d'une transformée de Laplace**
   a) Démontrer que pour tout f dans E la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1^{(f)})$ où $g_1^{(f)}$ a été définie à la question 4.
   b) Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

7. Soit $f \in F$.
   a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.
   b) **Théorème de la valeur initiale**
   On suppose de plus que f est de classe C^1 et croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

Dans la suite de cette partie, f est un élément de E.

8. **Théorème de la valeur finale**
   On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel.
   a) Démontrer que f appartient à F.
   b) Démontrer, à l'aide du théorème de convergence dominée à paramètre continu, que $\lim\limits_{x \to 0} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.
   c) Lorsque $\ell \neq 0$ déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.
9. Dans cette question on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).
10. Dans cette question on suppose seulement que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
    a) Démontrer que $R : x \mapsto R(x)$ est une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et déterminer R'.
    En déduire que pour tout $x > 0$ réel on a $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.
    b) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).
11. **Une application : calcul de l'intégrale de Dirichlet**
    Ici f est la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ si $t \in]0, +\infty[$.
    a) Démontrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
    b) En considérant la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t$, démontrer que la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
    c) Soit $x > 0$. Démontrer que la fonction $t \mapsto (\sin t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.
    d) Déterminer pour $x > 0$ une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie III - Injectivité de la transformation de Laplace

Le but de cette partie est de démontrer que $\mathcal{L} : E \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ est injective. On considère donc f dans E telle que $\mathcal{L}(f) = 0$.

12. **Le théorème des moments**
    Soient $a < b$ des réels et $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout n entier naturel on ait : $\displaystyle\int_a^b t^n h(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
    Démontrer que $h = 0$.

    On pourra utiliser ici librement le résultat suivant : *Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynômes.*

13. Soit $g :]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(-\ln t)$ si $t \in]0, 1]$. On pose pour u dans $]0, 1]$, $G(u) = \displaystyle\int_1^u g(s)\,\mathrm{d}s$.
    a) Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a $\displaystyle\int_0^1 u^{x-1} g(u)\,\mathrm{d}u = 0$.
    b) En déduire que pour tout n entier naturel on a : $\displaystyle\int_0^1 u^n G(u)\,\mathrm{d}u = 0$ et conclure.

Fin de l'énoncé