Devoir n° 2, une correction

Exercice 1 - Dérivation discrète

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P \in E_n$ alors $D(P) = P(x+1) - P(x) \in E_n$ de manière évidente.

   b) L'espace $\mathrm{Im}\,(\Delta_n)$ est engendré par les polynômes $(\Delta_n(x^j))_{0\leqslant j\leqslant n}$ qui valent :
$$\Delta_n(x^0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}\,, \quad \Delta_n(x^j) = (x+1)^j - x^j = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} x^i \in E_{n-1}$$
   La famille $(\Delta_n(x^j))_{1\leqslant j\leqslant n}$ est de degrés distincts deux à deux, donc est libre ; ainsi c'est une base de $\mathrm{Im}\,(\Delta_n)$ qui est donc de dimension n.

   Par égalité des dimensions, on a $\boxed{\mathrm{Im}\,(\Delta_n) = E_{n-1}.}$

   De plus on a clairement $E_0 \subset \ker(\Delta_n)$ et par le théorème du rang $\dim(\ker(\Delta_n) = 1$.

   Ainsi, par égalité des dimensions, on a : $\boxed{\ker(\Delta_n) = E_0.}$

   Autre idée : utiliser la matrice de Δ_n dans la base $(x^j)_{0\leqslant j\leqslant n}$.

   c) La matrice A de Δ_n dans la base canonique de E_n est triangulaire supérieure stricte non nulle, donc 0 est l'unique valeur propre et E_0 l'espace propre associé ; A est non diagonalisable.

   d) Soit $Q \in E_{n-1} = \mathrm{Im}\,(\Delta_n)$. Il existe alors $P \in E_n$ tel que $\Delta_n(P) = Q$; alors $P_1(x) = P(x) - P(0)$ convient, puisque Δ_n est nul sur E_0.

   Si P_2 est une (autre) solution, alors $P_2 - P_1 \in \ker(\Delta_n) = E_0$, donc P_1 et P_2 diffèrent d'une constante, qui est nulle puisqu'ils ont même valeur en 0.

   e) Le polynôme cherché $A = a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X$ vérifie
$$\left\{\begin{array}{rcl} 3a & = & 1 \\ 3a+2b & = & 0 \\ a+b+c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1/3 \\ b & = & -1/2 \\ c & = & 1/6 \end{array}\right.$$
   d'où
$$A = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{xX}{6} = \frac{X\,(X-1)\,(2X-1)}{6}.$$
   On a alors :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Big[A(k+1) - A(k)\Big] = A(n+1) - A(1) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

2. a) Si f est solution, on a par récurrence
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall\, x \in\,]n, n+1]\ , \quad f(x) = \phi(x-n) + \sum_{k=1}^{n} g(x-k)$$
   d'où au plus une solution, et on vérifie qu'elle convient.

   b) D'après la question 2a, D est surjective.

   c) En prenant $\phi = 1$, on a par récurrence comme ci-dessus,
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall\, x \in\,]n, n+1]\ , \quad f(x) = (\lambda+1)^n$$
   qui vérifie bien
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*\,, \quad f(x+1) = (\lambda+1)\,f(x) \quad \text{d'où} \quad [D(f)](x) = f(x+1) - f(x) = \lambda\, f(x)\,.$$

Exercice 2 - Formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie

Préliminaire

1. D'après le résultat rappelé en préambule, on a $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \dim E \times \underbrace{\dim \mathbb{R}}_{=1} = \dim E$.

2. a) L'image $\operatorname{Im}\varphi$ de φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ donc est de dimension 0 ou 1.
   — Si $\dim \operatorname{Im}\varphi = 0$ alors $\operatorname{Im}\varphi = \{0\}$ et donc φ est l'application nulle.
   — Sinon, $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}$ et $\dim \operatorname{Im}\varphi = 1 = \dim \mathbb{R}$, donc $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$, ce qui signifie exactement que φ est surjective.

   Conclusion. φ est soit nulle, soit surjective.

   b) Le théorème du rang affirme que $\dim E = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$. Comme φ n'est pas l'application nulle, on a $\dim \operatorname{Im}\varphi = 1$ de sorte que $\dim \ker \varphi = n - 1$.

Partie I - Des exemples

3. **Premier exemple**

   a) Pour tout $P \in E$ on a $g(P) \in \mathbb{R}$ et l'application g est linéaire par linéarité de l'intégrale. Ainsi $g \in E^*$.

   b) Comme $g(1) = 1$, g n'est pas l'application nulle. Son noyau est un hyperplan de E, qui est de dimension $p + 1$, donc de dimension p.

   c) Soit $k \in \{1, \ldots, p\}$. On a :

$$g(Q_k) = \int_0^1 Q_k(t)\,\mathrm{d}t = \left\{\frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x}{k+1}\right]_0^1 = 0.$$

   Ainsi $Q_k \in \ker g$.
   Comme les éléments de la famille $(Q_1, \ldots, Q_p)$ sont de degrés tous différents, c'est une famille libre de p vecteurs de $\ker g$ qui est de dimension p : c'est donc une base de $\ker g$.

4. **Second exemple**

   a) Pour tout P, Q dans E et λ réel on a :
   — $f(P) = P(0) \in \mathbb{R}$;
   — $f(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = f(P) + \lambda f(Q)$.
   Ainsi f est un élément de E^*.

   b) Pour P dans E, on a : $f(0) = 0 \Leftrightarrow P(0) = 0$. Ainsi $\ker f$ est l'ensemble des polynômes de E de terme constant nul, c'est à dire $\operatorname{vect}(X, X^2, \ldots, X^p)$.

5. a) D'après la question 2b, on a $\dim \ker g = \dim \ker f = n - 1$. Comme $\ker f \subset \ker g$, il vient $\ker f = \ker g$.

   b) Comme $\ker f \neq E$, il existe un élément x_0 de E qui n'appartient pas au noyau de f.

   c) • Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{vect}(x_0)$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda x_0$ et ainsi, puisque $x \in \ker f$:

$$0 = f(x) = \lambda \underbrace{f(x_0)}_{\neq 0}$$

ce qui amène $\lambda = 0$ donc $x = 0$.
On a donc $\ker f \cap \mathrm{vect}(x_0) = \{0_E\}$.

• De plus $\dim \ker f + \dim \mathrm{vect}(x_0) = n - 1 + 1 = \dim E$, ce qui permet de conclure que $E = \ker f \oplus \mathrm{vect}(x_0)$.

d) On pose $h = g(x_0)f - f(x_0)g$. Démontrer que h est nulle.
Soit $x \in E$. On écrit $x = y + \lambda x_0$ selon la somme directe $E = \ker f \oplus \mathrm{vect}(x_0)$. On a alors :

$$h(x) \quad = \quad g(x_0)\big(\underbrace{f(y)}_{=0} + \lambda f(x_0)\big) - f(x_0)\big(\underbrace{g(y)}_{=0} + \lambda g(x_0)\big) = 0$$

Ceci étant vrai quelque soit le choix de x dans E on a $h = 0$.

e) D'après la question précédente, comme $f(x_0) \neq 0$, il vient $g = \dfrac{f(x_0}{g(x_0)}g$: les formes linéaires f et g sont proportionnelles.

Partie II - Formes linéaires et structure euclidienne

11. a) Le produit scalaire étant linéaire de chacune de ses entrées, l(application f_a est linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}$: c'est une forme linéaire.

b) Le noyau de f_a est l'orthogonal du vecteur a.

c) Supposons que $f_a$soit l'application nulle. Pour tout x dans E on a donc $f_a(x) = 0$ et en particulier $f_a(a) = 0$ i.e. $\|a\|^2 = 0$ donc $a = 0_E$.

12. **Théorème de représentation des formes linéaires**

a) Soient a, b dans E et λ dans $\mathbb{R}$. Pour tout x dans E on a :

$$\begin{aligned} \Phi(a + \lambda b)(x) &= \langle a + \lambda b, x\rangle = \langle a, x\rangle + \lambda \langle b, x\rangle \\ &= \Phi(a)(x) + \lambda\Phi(b)(x) \end{aligned}$$

Ceci étant valable quelque soit le choix de x dans E, il vient : $\Phi(a + \lambda b) = \Phi(a) + \lambda\Phi(b)$.

b) • Soit $a \in \ker \Phi$. L'application f_a est alors nulle, donc $a = 0_E$ et ainsi $\ker \Phi = \{0_E\}$.

• L'application linéaire Φ est injective de E dans E^* qui sont des espaces vectoriels de même dimension : Φ est bijective (par le théorème du rang).

Conclusion. Φ est un isomorphisme de E sur E^*.

c) Comme Φ est une application bijective de E sur E^*, pour tout $\varphi \in E^*$ il existe un unique $a \in E$ tel que $\Phi(a) = \varphi$ et ainsi :

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x\rangle .$$

13. **Application aux formes linéaires sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$**

a) • Soient M et N dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On a :

$$(M \mid N) = \mathrm{tr}({}^tMN) = \mathrm{tr}({}^t({}^tMN)) = \mathrm{tr}({}^tNM) = (N \mid M).$$

- Fixons M dans $\mathcal{M}_p(\mathrm{I\!R})$. Pour A et B dans $\mathcal{M}_p(\mathrm{I\!R})$ et λ réel on a :

$$\begin{aligned}\langle M, A+\lambda B\rangle &= \mathrm{tr}({}^tM(A+\lambda B)) = \mathrm{tr}({}^tMA+\lambda {}^tMB)\\ &= \mathrm{tr}({}^tMA)+\lambda \mathrm{tr}({}^tMB) \quad \text{(par linéarité de la trace)}\\ &= \langle M, A\rangle + \lambda \langle M, B\rangle\end{aligned}$$

- Puis si $M \in \mathcal{M}_p(\mathrm{I\!R})$, en désignant par $(A)_{i,j}$ les coefficients d'une matrice A, on a :

$$\langle M, M\rangle = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{p}({}^tM)_{i,k}(M)_{k,i}\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{p}(M)_{k,i}(M)_{k,i}\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}(M)_{k,i}^2 \geqslant 0$$

De plus, si $\langle M, M\rangle = 0$ alors pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2$ on a $(M)_{k,i}^2 = 0$ donc $M = 0$.

Conclusion. $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathrm{I\!R})$.

b) Soit $\varphi : \mathcal{M}_p(\mathrm{I\!R}) \to \mathrm{I\!R}$ une forme linéaire. D'après la question 12c, il existe une matrice B dans $\mathcal{M}_p(\mathrm{I\!R})$ telle que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_p(\mathrm{I\!R})$ on ait :

$$\varphi(M) = \langle B, M\rangle = \mathrm{tr}({}^tBM).$$

On pose alors $A = {}^tB$ pour obtenir le résultat.