

Devoir n° 1, une correction

Endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel

1. • On a $f(e_1) = e_1 + e_2 - 2e_3$ et :

$$\begin{aligned} f^2(e_1) &= f(e_1 + e_2 - 2e_3) \\ &= f(e_1) + f(e_2) - 2f(e_3) \\ &= e_1 + e_2 - 2e_3 + 2e_1 + e_2 - 2e_3 - 2(2e_1 + 2e_2 - 3e_3) \\ &= -e_1 - 2e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

- La matrice de $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ dans la base $\mathcal{B}$ est alors :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Le rang de M est le même que celui de la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ obtenue en faisant $L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3$. Mais P est une matrice triangulaire supérieure qui n'admet pas 0 pour valeur propre : elle est inversible. La matrice M est donc de rang 3 et ainsi $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E .

Autre méthode (qui est en fait la même !) On sait que l'*on change pas le rang d'une famille de vecteurs en ajoutant à un de ces vecteur une combinaison linéaire des autres*. Ainsi la famille

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 \\ f(e_1) = e_1 + e_2 - 2e_3 \\ f^2(e_1) = -e_1 - 2e_2 + 2e_3 \end{array} \right.$$

a même rang que : $\left\{ \begin{array}{l} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = f(e_1) + f^2(e_1) = -e_2 \\ e'_3 = f^2(e_1) = -e_1 - 2e_2 + 2e_3 \end{array} \right.$.

Mais cette dernière famille est échelonnée donc libre. Ainsi $\beta = (e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une famille libre de 3 éléments de E qui est de dimension 3 : c'est une base de E .

- On a $f(e_1) = f(e_1)$ (si !) et $f(f(e_1)) = f^2(e_1)$ ce qui donne les deux premières colonnes de la matrice de f dans β . Une manière générale de faire est la suivante. Il existe λ , μ et ν complexes tels que :

$$f(f^2(e_1)) = \lambda e_1 + \mu f(e_1) + \nu f^2(e_1)$$

Calculons alors $f^3(e_1)$. On a :

$$\begin{aligned} f^3(e_1) &= f(f^2(e_1)) \\ &= f(-e_1 - 2e_2 + 2e_3) \\ &= -f(e_1) - 2f(e_2) + 2f(e_3) \\ &= -(e_1 + e_2 - 2e_3) - 2(2e_1 + e_2 - 2e_3) + 2(2e_1 + 2e_2 - 3e_3) \\ &= -e_1 + e_2 \end{aligned}$$

Comme $\lambda e_1 + \mu f(e_1) + \nu f^2(e_1) = \lambda e_1 + \mu(e_1 + e_2 - 2e_3) + \nu(-e_1 - 2e_2 + 2e_3)$ on obtient l'expression :

$$f^3(e_1) = (\lambda + \mu - \nu)e_1 + (\mu - 2\nu)e_2 + (-2\mu + 2\nu)e_3$$

et l'unicité des coordonnées dans une base permet d'écrire le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu - \nu = -1 \\ \mu - 2\nu = 1 \\ -2\mu + 2\nu = 0 \end{array} \right.$$

qui donne de suite $\lambda = \mu = \nu = -1$ et la matrice de f dans β est alors : $[f]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Autre méthode. On a vu que $M = [Id_E]_{\beta, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et on a alors (« règle des fractions ») :

$$[f]_{\beta} = [Id_E]_{\beta, \mathcal{B}} [f]_{\mathcal{B}} [Id_E]_{\mathcal{B}, \beta} = MAM^{-1}$$

On inverse alors M par la méthode du système et on effectue le produit matriciel...

2. • On a : $f^4(e_1) = f(f^3(e_1)) = f(-e_1 + e_2) = -f(e_1) + f(e_2) = -(e_1 + e_2 - 2e_3) + (2e_1 + e_2 - 2e_3)$
donc $f^4(e_1) = e_1$.

• Les éléments de la famille $\gamma = (e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ sont distincts. Puis on vient de démontrer que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E donc c'est une famille génératrice de E donc γ est une famille génératrice de E . Enfin on a bien

$$\boxed{f^4(e_1) = e_1}.$$

• **Conclusion.** f est cyclique d'ordre 4 dont un cycle est $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$.

3. Posons $h = f^4 - Id_E$. On a :

- $h(e_1) = f^4(e_1) - e_1 = 0$
- $h(f(e_1)) = f^4(f(e_1)) - f(e_1) = f(f^4(e_1)) - f(e_1) = f(e_1) - f(e_1) = 0$
- $h(f^2(e_1)) = f^4(f^2(e_1)) - f^2(e_1) = f^2(f^4(e_1)) - f^2(e_1) = f^2(e_1) - f^2(e_1) = 0$

Il en résulte que h est l'endomorphisme nul puisque les images par h des éléments de la base β sont nulles et ainsi

$$\boxed{f^4 = Id_E}.$$

Partie 2 - Cas général

4. La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$, qui contient p éléments, est génératrice de E (par la définition d'un cycle) : elle contient donc au moins $n = \dim E$ éléments ce qui prouve que $p \geq n$.

5. • Soit k dans $\{0, \dots, p-1\}$. On a alors $f^p(f^k(x_0)) = f^{p+k}(x_0) = f^k(\underbrace{f^p(x_0)}_{=x_0}) = f^k(x_0)$.

Fixons alors x dans E . Comme $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E , il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}$ dans $\mathbb{C}$ tels que :

$$x = \alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x_0) = \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x_0)$$

Par linéarité de f on a :

$$f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} f^p(f^k(x_0)) = \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x_0) = x$$

Il en résulte que pour tout x dans E on a $f^p(x) = x$ et ainsi $f^p = Id_E$.

• Selon ce qui précède on a $f^p = Id_E$ donc (sachant que $p \geq n \geq 1$) on obtient correctement :

$$f \circ f^{p-1} = Id_E \quad \text{et} \quad f^{p-1} \circ f = Id_E$$

ce qui permet d'affirmer que f est bijective de bijection réciproque f^{p-1} .

6. a. Notons, puisque $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E , que $x_0 \neq 0_E$. Appelons maintenant $\mathcal{E}$ l'ensemble des k entiers naturels tels que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0))$ soit libre.

L'ensemble $\mathcal{E}$ est **non vide** puisque la famille x_0 est libre donc $0 \in E$ et est **majoré** par n puisque toute famille de cardinal strictement supérieur à $n = \dim E$ est liée.

En résumé, $\mathcal{E}$ est **une partie non vide et majorée** de $\mathbb{N}$: elle admet un plus grand élément qui est l'entier m cherché.

- b. Par définition de m , la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^m(x_0))$ est liée : il existe donc $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ dans $\mathbb{C}$, **non tous nuls**, tels que :

$$\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_m f^m(x_0) = 0 \quad (\clubsuit)$$

Supposons un instant que $\alpha_m = 0$; il reste alors $\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_{m-1} f^{m-1}(x_0) = 0$.
Comme la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre il vient :

$$\alpha_0 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$$

et on obtient une contradiction avec le fait que $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ sont non tous nuls. Ainsi $\boxed{\alpha_m \neq 0}$.

En vertu de ($\clubsuit$), on peut alors écrire :

$$\boxed{f^m(x_0) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_m} x_0 - \dots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} f^{m-1}(x_0)}$$

- c. • Supposons que pour un certain $k \geq m$ entier le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des éléments de la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$. Il existe alors $\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}$ dans $\mathbb{C}$ tels que :

$$f^k(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^i(x_0)$$

On a alors par linéarité de f :

$$f^{k+1}(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^{i+1}(x_0) = \sum_{i=0}^{m-2} \alpha_i f^{i+1}(x_0) + \alpha_{m-1} f^m(x_0)$$

Mais on vient de démontrer, à la question précédente, que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire d'éléments de la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ donc $f^{k+1}(x_0)$ est combinaison linéaire d'éléments de $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.

Conclusion. Par récurrence on peut donc affirmer que pour tout $k \geq m$ entier, $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des éléments de la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ et on peut noter que c'est encore vrai pour k entier naturel quelconque.

- d. Prenons x dans M . Comme $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E , x est combinaison linéaire complexe des éléments de $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ qui eux même, en vertu de la question précédente, sont des combinaison linéaires des éléments de $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.

Il en résulte que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est génératrice de E et comme c'est une famille libre (via la définition de m), on peut conclure que c'est une base de E (qui est de dimension n) ; comme cette famille contient m éléments on a $\boxed{n = m}$.

7. a. La famille $\gamma = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E et $f^n(x_0)$ est un vecteur de E : les complexes $a_0, \dots, a_{n-1}$ ne sont autres que les **composantes** de $f^n(x_0)$ dans la base γ .

- b. Posons $h = f^n - a_0 \text{Id}_E + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1} = f^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i$. On a $h \in \mathcal{L}(E)$ et f et h commutent puisque h est un polynôme en f . Pour tout k dans $0, \dots, n-1$ on a alors :

$$h(f^k(x_0)) = h \circ f^k(x_0) = f^k \circ h(x_0) = f^k(h(x_0)) = f^k(0) = 0$$

Ainsi l'image de tout vecteur de la base γ par h est nul. Comme h est linéaire on en déduit que $h = 0$ et ainsi :

$$\boxed{f^n = a_0 \text{Id}_E + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}}$$

- c. Pour tout k dans $\{0, \dots, n-2\}$ on a $f(f^k(x_0)) = f^{k+1}(x_0)$ et

$$f(f^{n-1}(x_0)) = f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)$$

donc la matrice de f dans la base γ est :

$$[f]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

d. • Si λ est complexe, le rang de $f - \lambda \text{Id}_E$ est aussi le rang de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Or les $n - 1$ premières colonnes de M forment une famille de vecteurs échelonnés donc libre ; la matrice admet au moins $n - 1$ colonnes indépendantes : son rang est supérieur à $n - 1$ et ainsi $\boxed{\text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E) \geq n - 1}$.

• Soit λ réel. Le théorème du rang affirme que $n = \dim \ker(f - \lambda \text{Id}_E) + \text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E)$. Ainsi :

$$\dim \ker(f - \lambda \text{Id}_E) = n - \text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E) \leq 1 \quad (\heartsuit)$$

Si maintenant λ est valeur propre de f alors $\ker(f - \lambda \text{Id}_E)$ est non trivial donc $\dim \ker(f - \lambda \text{Id}_E) \geq 1$ et avec $(\heartsuit)$ on peut conclure que $\boxed{\text{les sous-espaces propres de } f \text{ sont de dimension } 1}$.

8. a. Si λ est valeur propre de f alors il existe x dans E **non nul** tel que $f(x) = \lambda x$ et une récurrence immédiate permet de dire que $f^n(x) = \lambda^n x$. Mais on a démontré à la question 2 de la partie 2 que $f^n = \text{Id}_E$; il vient ainsi $x = \lambda^n x$. Comme x est non nul on a donc $\boxed{\lambda = 1}$.

b. Pour tout k dans $\{0, \dots, n - 2\}$ on a toujours $f(f^k(x_0)) = f^{k+1}(x_0)$ et $f(f^{n-1}(x_0)) = x_0$ puisque f est cyclique d'ordre n . La matrice de f dans la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

c. • Si λ est valeur propre de f on a vu que $\lambda^n = 1$ donc λ est une racine complexe de l'unité et il existe alors k dans $\{0, \dots, n - 1\}$ tel que :

$$\lambda = e^{i \frac{2k\pi}{n}} = \omega_k$$

• Cherchons maintenant lesquelles de ces racines de l'unité sont effectivement valeurs propres de f .

$\boxed{\text{Fixons } k \text{ dans } \{0, \dots, n - 1\}}$ et regardons si ω_k est valeur propre de f . Pour v vecteur de E dont la colonne des

coordonnées dans $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ on a :

$$f(v) = \omega_k v \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \omega_k \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow (S) \begin{cases} v_n = \omega_k v_1 \\ v_1 = \omega_k v_2 \\ \dots \\ v_{n-1} = \omega_k v_n \end{cases}$$

• Posons alors $v_n = 1$. On pose encore $v_{n-1} = \omega_k v_n$ et ainsi de suite jusqu'à $v_1 = \omega_k v_2$. Par produit membre à membre de ces $n - 1$ égalités on obtient :

$$v_1 v_2 \dots v_{n-1} = \omega_k^{n-1} v_2 \dots v_n \text{ i.e. } v_1 = \omega_k^{n-1} v_n$$

Comme $\omega_k^n = 1$ on a alors $v_n = \omega_k v_1$ de sorte que $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ est bien solution de (S) . Il en résulte que ω_k est bien valeur propre de f puisque le vecteur $V_k = \omega_k^{n-1} x_0 + \omega_k^{n-2} f(x_0) + \dots + f^{n-1}(x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_k^{n-1-j} f^j(x_0)$ (qui est non nul) vérifie :

$$f(V_k) = \omega_k V_k$$

• En conclusion f admet n valeurs propres distinctes qui sont $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$.

Remarque. Il en résulte que f est diagonalisable.

Chaque espace propre est de dimension 1 et une base de l'espace propre associé à la valeur propre ω_k est donnée par le vecteur : $\sum_{j=0}^{n-1} \omega_k^{n-1-j} f^j(x_0)$.