Devoir n° 1

Pour le lundi 16 septembre 2024

*La **présentation** de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*

Endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

- On note Id_E l'application identité de E.
- Pour tout endomorphisme f de E on note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout entier naturel k on pose :

$$f^{k+1} = f^k \circ f$$

- Si $p \in \mathbb{N}^*$ on dit qu'un endomorphisme f de E est *cyclique d'ordre* p s'il existe un élément x_0 de E tel que :
  - ∗ $f^p(x_0) = x_0$;
  - ∗ $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E ;
  - ∗ La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est constituée d'éléments distincts.

  La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée un *cycle* de f.

- Lorsque f est un endomorphisme de E, une valeur propre de f est un complexe λ tel que $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$.

On rappelle que pour tout entier $n \geqslant 1$ l'équation $z^n = 1$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$ admet exactement n solutions complexes, qui sont les nombres $z_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Partie 1 - Etude d'un exemple

Dans cette partie E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $\beta = (e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans β.
2. Montrer que f est cyclique d'ordre 4 et que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f.
3. Montrer que $f^4 = \mathrm{Id}_E$.

Partie 2 - Cas général

Dans cette partie E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $n \geqslant 1$ et on suppose que f est un endomorphisme cyclique d'ordre p de E. Soit $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f.

4. Démontrer que $p \geqslant n$.
5. Démontrer que $f^p = \mathrm{Id}_E$. En déduire que f est bijective.
6. a. Justifier de l'existence d'un plus grand entier k tel que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0))$ soit libre.

   On appellera m cet entier dans la suite du problème.

b. Démontrer que $f^m(x_0)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.

c. Démontrer par récurrence que pour tout $k \geqslant m$ entier, $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des éléments de la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.

d. Montrer que $m = n$. Qu'en déduire pour la famille $\gamma = (x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$?

7. On note $a_0, \dots, a_{n-1}$ les complexes tels que :

$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)$$

a. Justifier brièvement de l'existence et de l'unicité de ces complexes $a_0, \dots, a_{n-1}$.

b. Démontrer que :

$$f^n = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}$$

c. Déterminer la matrice de f dans la base $\gamma = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

d. Démontrer que pour tout λ complexe $\mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \geqslant n - 1$. En déduire que si λ complexe est valeur propre de f alors $\dim \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 1$.

8. On suppose dans cette question que f est cyclique d'ordre n.

a. Démontrer que si λ complexe est valeur propre de f alors $\lambda^n = 1$.

b. Déterminer la matrice de f dans la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

c. Démontrer que f les valeurs propres de f sont exactement les racines n-ièmes de l'unité.