

Zoom sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ munis de l'ordre

PC

30 août 2023

Sommaire

1 Relations d'ordre

1.1 Généralités

Définition 1 Soit E un ensemble. Une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur E est une relation binaire (i.e. entre deux éléments de E) E qui est :

- **réflexive** : $x \preccurlyeq x$ pour tout x dans E .
- **antisymétriques** : $(\forall (x, y) \in E^2) (x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq x \Rightarrow x = y)$
- **transitive** : $(\forall (x, y, z) \in E^3) (x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z)$

On dit de plus qu'il s'agit d'une relation **d'ordre total** lorsque pour tout x et y dans E on a $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$ i.e. lorsque deux éléments quelconques de E sont comparables.

Remarque 1.1

1. On peut noter autant $y \succcurlyeq x$ lorsque $x \preccurlyeq y$.
2. On peut aussi définir lorsque E est muni d'un ordre $\preccurlyeq$ la relation $\prec$ par :

$$x \prec y \Leftrightarrow (x \preccurlyeq y \text{ et } x \neq y)$$

Question : $\prec$ est-elle une relation d'ordre sur E ?

3. On dit que E est **totalelement ordonnée** par la relation $\preccurlyeq$ lorsque pour tout x et y dans E on a :

$$Non(x \preccurlyeq y) \Rightarrow x \succcurlyeq y$$

Exemple 1.1

1. La relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$: on a à chaque fois un ordre total.
2. Si E est un ensemble, $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$: c'est un ordre partiel.

3. Si $E = \mathbb{R}^2$, on peut définir des relations d'ordre. Par exemple on a :

- **L'ordre produit** défini par : $(x, y) \preccurlyeq (x', y')$ si et seulement si $x \leq x'$ et $y \leq y'$. C'est un ordre partiel.
- **L'ordre lexicographique** défini par : $(x, y) \preccurlyeq (x', y')$ si et seulement si $x \leq x'$ ou $(x = x' \text{ et } y \leq y')$. On a ici un ordre total.

4. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est injective (E ensemble quelconque non vide), on peut définir une relation d'ordre total $\preccurlyeq$ sur E par :

$$x \preccurlyeq x' \Leftrightarrow f(x) \leq f(x').$$

5. Pour $E = \mathbb{N}^*$ la divisibilité est une relation d'ordre partiel.

Exercice 1

Est-il possible de munir $\mathbb{C}$ d'une relation d'ordre total ?

La réponse est OUI. On prend par exemple l'ordre défini par :

$$z \preccurlyeq z' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(z') \text{ ou } (\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Im}(z')).$$

C'est l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$. $\square$

Exercice 2

Est-il possible de munir $\mathbb{C}$ d'une relation d'ordre totale $\leq$ compatible avec l'addition et la soustraction i.e. telle que pour tout z, z' et z'' dans $\mathbb{C}$ on ait :

- (1) $z \leq z' \Rightarrow z + z'' \leq z' + z''$,
- (2) $(0 \leq z \text{ et } 0 \leq z') \Rightarrow 0 \leq zz'$?

On raisonne par *analyse/synthèse*. Supposons que ce soit le cas. La propriété (1) implique que pour tout $z \leq 0$ on a $0 \leq -z$ (en ajoutant $-z$ de part et d'autre). Ainsi la propriété (2) amène :

- $0 \leq z \Rightarrow 0 \leq z^2$
- $z \leq 0 \Rightarrow 0 \leq z^2$

On obtient alors que pour tout z dans $\mathbb{C}$ on a $z^2 \geq 0$. Mais tout complexe est un carré puisque si $z = \rho e^{i\theta}$ alors $z^2 = \left(\rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2$. Il en résulte que si $z \in \mathbb{C}$ alors $0 \leq -z$ et $0 \leq z$ puisque ce sont tous les deux des carrés donc $z \leq 0$ et $0 \leq z$ d'où $z = 0$ par antisymétrie. On obtient ainsi $\mathbb{C} = \{0\}$ ce que l'on sait être absurde. $\square$

1.2 Applications monotones

Soient $f : E \rightarrow F$ une application entre deux ensembles ordonnés E et F . On peut définir les notions d'application croissantes, strictement croissantes ...

Théorème 1

Soient E, F, G trois ensembles ordonnés et $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$.

1. Si f et g sont monotones de même sens (resp. de sens contraire) alors $g \circ f$ est croissante (resp. décroissante).
2. Si f est bijective et monotone et si E est totalement ordonnée alors f^{-1} est monotone de même sens que f .

Démonstration.

1. Exo de première S...
2. Supposons par exemple que f est croissante. Prenons a et b dans F tels que $a \leq b$. On veut démontrer que $f^{-1}(a) \leq f^{-1}(b)$. Raisonnons par l'absurde et supposons $NON(f^{-1}(a) \leq f^{-1}(b))$. Puisque E est totalement ordonné on a donc $f^{-1}(a) > f^{-1}(b)$ et ainsi $f(f^{-1}(a)) > f(f^{-1}(b))$ i.e. $a > b$ ce qui est absurde.

□

1.3 Le langage de l'ordre

Soit E un ensemble ordonné par $\leq$. Soit $A \subset E$ (pensez à $[0, 1[\subset \mathbb{R}$ dans ce qui suit). SOUS RESERVE D'EXISTENCE :

- Un **minorant** de A dans E est un élément u dans E tel ue pour tout $a \in A$ on ait $u \leq a$.
- Un **majorant** de A dans E est un élément v de E tel que pour tout $a \in A$ on ait $a \leq v$.

- Un **plus petit élément** m de A est un minorant de A qui appartient à A i.e. un élément $\boxed{m \in A}$ tel que $(\forall a \in A)(m \leq a)$.

NB : lorsqu'il existe un plus petit élément, il est unique. En effet si m et m' sont deux plus petits éléments de A alors $m \leq m'$ et $m' \leq m$ donc $m = m'$. On peut alors noter $\boxed{m = \min A}$

- Un **plus grand élément** M de A est un majorant de A qui appartient à A i.e. un élément $\boxed{M \in A}$ tel que $(\forall a \in A)(a \leq M)$. De même lorsque M est un plus grand élément de A , c'est le seul et on le note $M = \max A$.

- **La borne inférieure** de A , notée $\inf A$ est le plus grand des minorants de A dans E .

Pour montrer que A admet une borne inférieure m on procède de la manière suivante :

- on montre que $m \leq a$ pour tout a dans A ;
- Si u est un minorant de A on montre que $u \leq m$.

- **La borne supérieure** de A , notée $\sup A$ est le plus petit des majorants de A dans E .

Pour montrer que A admet une borne supérieure M on procède de la manière suivante :

- on montre que $a \leq M$ pour tout a dans A ;
- Si v est un majorant de A on montre que $M \leq v$.

Remarque 1.2

1. Lorsque $\exists \min A$ alors $\exists \inf A = \min A$.
2. Si E est un ensemble, on sait que $A = \emptyset$ est une partie de E .
 - Cette partie est-elle majorée, minorée ? La réponse est oui puisque pour tout $x \in E$ et tout $a \in \emptyset$ on a $a \geq x$ et $a \leq x$.
 - Cette partie admet-elle un borne inférieure ? La réponse est ça dépend. Par exemple si $E = \mathbb{R}$, tout réel est minorant de $A = \emptyset$ donc il n'existe pas de plus grand des minorants dans $\mathbb{R}$. Si maintenant $E = [0, \pi]$, tout élément de E est minorant de $\emptyset$ et π est le plus grand de ces minorant ; donc, vue comme partie de $[0, \pi]$, l'ensemble vide admet une borne inférieure qui est π et une borne supérieure qui est 0!!! Par contre l'ensemble vide n'admet jamais de plus grand élément ni de plus petit élément. **Retenir :** la notion de borne inférieure et de borne supérieure est relative à l'espace E dans lequel on travaille.

Exercice 3

Ici $E = \mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel. Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$. Déterminer lorsque ces réels existent $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\max A$.

On prévoit $\exists \inf A = 0, \exists \sup A = 2, \exists \max A = 2, \nexists \min A$.

- Pour tous $m \geq 1$ et $n \geq 1$ entiers on a $\frac{1}{n} \leq 1$ et $\frac{1}{m} \leq 1$ donc $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 2$ et 2 majore A . Puis si v majore A on a $v \geq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ pour tous $m \geq 1$ et $n \geq 1$ entiers ; en particulier si $m = 1$ et $n = 1$ on obtient $v \geq 2$. On a donc $\boxed{\exists \sup A = 2}$

Mieux, $2 \in A$ donc $\boxed{\exists \max A = 2}$.

- Il est clair que 0 minore A . Puis si u est un minorant de A on a pour tous $m \geq 1$ et $n \geq 1$ entiers :

$$u \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

On fait tendre à bon droit $n \rightarrow +\infty$ et on obtient $u \leq \frac{1}{m}$ pour tout $m \geq 1$ entier. On fait alors tendre $m \rightarrow +\infty$ et on obtient $v \leq 0 : 0$ est le plus grand des minorants de $A : \exists \min A$.

Enfin si $\exists \min A$ alors $\min A = \inf A = 0$ et $0 \in A$ ce qui est absurde.
□

Théorème 2

Soit E un ensemble ordonné, $A \subset E$.

1. Si $\exists \inf A = m \in E$ et si m n'est pas le plus petit élément de A alors pour tout $x \in E$ tel que $x > m$ il existe $a \in A$ tel que $x > a > m$.
2. Si $\exists \sup A = M \in E$ et si M n'est pas le plus petit élément de A alors pour tout $x \in E$ tel que $x < M$ il existe $a \in A$ tel que $x < a < M$.

Démonstration.

1. En effet dans le cas contraire l'élément x serait un minorant de A plus grand que m ce qui est absurde.
2. La même.

□

2 Zoom sur $\mathbb{N}$ muni de l'ordre naturel

2.1 Les propriétés essentielles de $\mathbb{N}$ liées à l'ordre.

Historiquement l'axiomatique de la construction de $\mathbb{N}$ est due au mathématicien italien PEANO en 1889. Les propriétés essentielles de $\mathbb{N}$ liées à l'ordre sont les suivantes.

- **Axiome 1.** $\mathbb{N}$ est un ensemble infini non majoré (dans $\mathbb{R}$).
- **Axiome 2.** Toute partie majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.
- **Axiome 3.** Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

Exercice 4

Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ possèdent-ils ces trois propriétés ?

Pour $\mathbb{Z}$, la réponse est non pour $A3$.

Pour $\mathbb{Q}$, la réponse est non pour $A3$ et $A2$: pour $A2$, prendre

$$\left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Pour $\mathbb{R}$, idem.

□

Remarque 2.1

Une petite chose qui n'a l'air de rien, mais qui sauve bien souvent. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$:

$$m < n \Leftrightarrow m + 1 \leq n \Leftrightarrow m \leq n - 1.$$

2.2 Les différents raisonnements par récurrence

Théorème 3 (Principe de récurrence)

Si A est une partie de $\mathbb{N}$ qui vérifie $0 \in A$ et $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in A \Rightarrow n + 1 \in A)$ alors $A = \mathbb{N}$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on suppose que $A \neq \mathbb{N}$. On considère alors $F = \mathbb{N} \setminus A$ qui est une partie non vide de $\mathbb{N}$: F admet donc un plus petit élément $N_0 > 0$ puisque $0 \in A$. Mézalors $N_0 - 1 \in A$ donc N_0 aussi ce qui est absurde. □

Corollaire 3.1

Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de l'entier n . On suppose que :

- $H1)$ $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
- $H2)$ $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1))$

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Variantes importantes.

- **Initialisation à partir d'un certain rang.** Soient $N_0 \in \mathbb{N}$ et pour $n \geq N_0$ soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de l'entier n . On suppose que :

- $H1)$ $\mathcal{P}(N_0)$ est vraie ;
- $H2)$ $(\forall n \geq N_0)(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1))$

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq N_0$.

- **Récurrence finie.** Soient $N_0 \in \mathbb{N}$ et pour $n \geq N_0$ soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de l'entier n . On suppose que :

- $H1)$ $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
- $H2)$ $(\forall n \in \{0, \dots, N_0 - 1\})(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1))$

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \{0, \dots, N_0\}$.

Remarque 2.2

La manière de procéder pour démontrer par récurrence une propriété $P(n)$:

- on vérifie d'abord que la propriété est vraie au rang initial ;
- on **fixe** ensuite un entier n et on suppose que $P(n)$ est vraie ;
- on traduit alors le fait que $P(n)$ soit vraie et on cherche à montrer que $P(n+1)$ est vraie ;
- on conclut enfin, grâce au théorème de la récurrence.

Exemple 2.1

1. Il existe des propriétés héréditaires qui ne s'initialisent jamais. Par exemple $10^{n+1} + 1 = 10(10^n + 1) - 9$ est divisible par 9 lorsque $10^n + 1$ l'est mais il n'existe pas d'entier naturel n tel que 9 divise $10^n + 1$ (la somme des chiffres est 2 : ce n'est jamais un multiple de 9!).
2. Soit G une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui vérifie $-a \in G$ et $a + b \in G$ dès que a et b sont dans G . Démontrer que pour tout a dans G et tout n entier relatif on a : $na \in G$

Enfin on termine par l'une des plus importante variante.

Théorème 4 (Théorème de la récurrence faible)

Soit N_0 un entier et pour $n \geq N_0$ soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de l'entier n . On suppose que :

1. $H1)$ $\mathcal{P}(N_0)$ est vraie ;
2. $H2)$ $(\forall n \geq N_0) ((\forall k \in \{N_0, \dots, n\}) (\mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq N_0$

Démonstration. Tout à fait identique à ce qui précède... □

Illustration 4.1 Tout entier $n \geq 2$ est un produit de nombres premiers.

3 Zoom sur $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel

3.1 Généralités

- L'ordre naturel sur $\mathbb{R}$ est compatible avec les opérations de $\mathbb{R}$...
- **La fonction valeur absolue.** Pour a dans $\mathbb{R}$ on pose :

$$|a| = \max(-a, a)$$

On a alors pour tout x et y réels :

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

3.2 Des caractérisations essentielles de la borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$

Théorème 5

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

1. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

$$(i) \exists \sup A = M$$

$$(ii) M \text{ majore } A \text{ et pour tout } \varepsilon > 0 \text{ il existe } a \in A \text{ tel que } M - \varepsilon < a.$$

2. **Caractérisation séquentielle de la borne supérieure.** Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

$$(i) \exists \sup A = M$$

$$(ii) M \text{ majore } A \text{ et il existe une suite } (a_n) \text{ dans } A \text{ telle que } a_n \xrightarrow{+\infty} M.$$

Démonstration. • Supposons (i). Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que pour tout a dans A on ait $M - \varepsilon \geq a$. Alors $M - \varepsilon$ est un majorant de A et on a $M - \varepsilon < M$ ce qui contredit la définition de M .

• Réciproquement, supposons (ii) et montrons que M est le plus petit des majorants de A . On sait déjà que M est un majorant de A . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe M_1 majorant de A tel que : $M_1 < M$. On pose alors $\varepsilon = M - M_1$ et il existe alors, par hypothèse, un élément a de A tel que :

$$M - \varepsilon < a \quad \text{i.e.} \quad M_1 < a$$

ce qui contredit le fait que M_1 est un majorant de A . □

Exercice 5

Enoncer et démontrer des propriétés analogues concernant la borne inférieure d'une partie A de $\mathbb{R}$.

3.3 L'axiome de la borne supérieure

Axiome. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

Remarque 3.1

1. Pour insister, une borne supérieure n'est pas forcément un maximum comme le montre l'exemple de $A = [0, 1[$.

- On a vu précédemment que $\emptyset$ n'admet pas de borne supérieure ni de borne inférieure dans $\mathbb{R}$: **avant d'utiliser cette axiome pour une partie A de $\mathbb{R}$, toujours s'assurer que A est non vide.**
- $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas l'axiome de la borne supérieure : $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.
- On a bien entendu l'axiome de la borne inférieure : **toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.**

Théorème 6

$\mathbb{R}$ est archimédien : pour tout $a > 0$ et tout b réel il existe n entier tel que : $na > b$.

Démonstration. Si $b \leq 0$, $n = 1$ convient. Sinon on considère : Soit $A = \{k \in \mathbb{N} \mid ka \leq b\}$. Cet ensemble A est non vide : il contient 0. De plus A est majoré par $\frac{b}{a}$. On a donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$: elle admet un plus grand élément $M = \max A$. Puis on a $M+1 \notin A$ donc $(M+1)a > b$. $\square$

Exercice 6

Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n entier tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

3.4 Les intervalles de $\mathbb{R}$

On connaît les définitions des différents types d'intervalles de $\mathbb{R}$ (intervalles ouverts, fermés et mixtes...). Par exemple $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ est un intervalle fermé. J'insiste sur le fait qu'un intervalle est **SANS TROU**.

Définition 2 Une partie C de $\mathbb{R}$ est convexe si pour tout a et b dans C on a $(1-t)a + tb \in C$ pour tout t dans $[0, 1]$.

Théorème 7

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Il faut montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si elle est convexe.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Il est convexe : débile.
- Réciproquement, soit C une partie convexe de $\mathbb{R}$. On discute selon le cas :
 - C est vide ou non ;
 - C est majoré ou non ;
 - C est minoré ou non ;
 - $\sup I$ et $\inf I$ sont dans C ou pas.

Par exemple, supposons que C soit non vide, non majoré et minoré. On dispose donc de $a \inf I \in \mathbb{R}$. Si $a \notin I$, on montre que $C =]a, +\infty[$.

- On montre $C \subset]a, +\infty[$: débile.
- On montre $C \supset]a, +\infty[$. Si $x \in]a, +\infty[$ on a bien $x > a$. Par définition de la borne inférieure, il existe u dans C tel que $a < u < x$. Puis comme C est non majoré, pour tout M réel il existe $v \in C$ tel que $v > M$. En prenant $M = x$ on obtient donc $v \in C$ tel que $v \geq x$. Ainsi $x \in]u, v[$ et avec u et v dans C qui est convexe : on est donc assuré que $x \in C$.

$\square$

3.5 La fonction partie entière

Définition 3 Pour x dans $\mathbb{R}$, la partie entière de x est le plus petit entier naturel inférieur à x . On la note $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Remarque 3.2

Pour tout x réel on a $E(x) \leq x < E(x) + 1$

Exercice 7

Si a et b sont des réels tels que : $b - a > 1$ alors $]a, b[$ rencontre $\mathbb{Z}$.

On prend la partie entière N de a . On a donc $N \leq a < N+1$. Mais $N+1 \leq a+1 < b$ donc $N+1 \in]a, b[$. $\square$

3.6 Parties denses dans $\mathbb{R}$

Définition 4 Une partie D de $\mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$ lorsque D rencontre chaque intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit $D \subset \mathbb{R}$. Démontrer que D est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de D .

Théorème 8

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- Pour $\mathbb{Q}$. Soient a, b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Il existe $n \geq 1$ entier tel que $1 < n(b-a)$. On cherche alors p entier relatif tel que :

$$a < \frac{p}{n} < b \text{ i.e. } na < p < nb$$

On a $n(b-a) > 1$ donc $]na, nb[$ rencontre $\mathbb{Z}$ et ça marche.

2. Pour $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. L'intervalle $]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$ contient un rationnel par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On a donc $r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2} \text{ i.e. } a < r + \sqrt{2} < b$$

Or $r + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ sinon $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

□

Remarque 3.3 (Culture)

1. $\mathbb{Q}$ en bijection avec $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$.
2. $a = 1, \bar{9} = 1,999\dots = 2$. En effet $10a - a = 9$ donc $a = 1$.

3.7 La droite numérique achevée

Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ n'interviennent pas dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

On étend la relation d'ordre usuelle de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant pour x et y dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- $x \leq y$ si $y = +\infty$.
- $x \leq y$ si $x = -\infty$.

Ainsi toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure; par exemple $\sup \emptyset = -\infty$ et si $A \subset \mathbb{R}$ est non majorée alors $\sup A = +\infty$.

4 Exercices

Exercice 1

Sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0; 1])$, on définit la relation d'ordre $\leq$ induite par la relation d'ordre $\leq$ usuelle dans l'ensemble des fonctions à valeurs réelles.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1}$. Donner un majorant de f dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0; 1])$ différent de f , après avoir justifié l'appartenance de f à $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0; 1])$.
2. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0; 1])$ admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?

Exercice 2

Soient x et y des réels.

1. A-t-on $\mathbf{E}(x + y) = \mathbf{E}(x) + \mathbf{E}(y)$?
2. Exprimez $\mathbf{E}(-x)$ en fonction de $\mathbf{E}(x)$ (et démontrez-le).

Exercice 3

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2^n > n$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2^n + 1 \geq n^2$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 4

Pour les parties A de $\mathbb{R}$ suivantes, justifier l'existence éventuelle et déterminer $\sup A$ et $\inf A$:

1. $A = \left\{ \frac{2^n}{3^{n+1}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.
2. $A = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$.
3. $A = \left\{ \frac{n}{mn+1} \mid n \in \mathbb{N}^* \text{ et } m \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 5

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comment caractérise-t-on un élément x de $A + B$?
2. Montrer que $A + B$ est non vide et majorée ; déterminer $\sup(A + B)$.

Exercice 6

Vrai ou Faux ?

1. Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure :

V	F
---	---
2. Si une partie A de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure K , tout réel strictement inférieur à K est dans A :

V	F
---	---
3. $\mathbb{N}$ vérifie la "propriété de la borne supérieure" :

V	F
---	---
4. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. M est le maximum de A si et seulement si M est la borne supérieure de A et $M \in A$:

V	F
---	---

Exercice 7

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On note $-A = \{-a \mid a \in A\}$. Montrer que $-A$ est non vide et minorée ; déterminer $\inf(-A)$.

Exercice 8

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$.
2. Montrer que $A \cup B$ est majorée ; déterminer $\sup(A \cup B)$.

3. Montrer que $A \cap B$ est majorée ; que peut-on dire de $\sup(A \cap B)$?

Exercice 9

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que : $(\forall (a, b) \in A \times B) (a \leq b)$.

1. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent.
2. Montrer que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 10

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}_+$. On note $AB = \{ab \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$. Montrer que AB admet une borne supérieure et la déterminer en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.

Exercice 11

Vrai ou Faux ?

1. Toute intersection d'intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$:

V	F
---	---
2. La réunion de deux intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$:

V	F
---	---
3. Le complémentaire d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$:

V	F
---	---
4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. **a)** Si I est fermé, alors I est borné :

V	F
---	---

.
b) Si I est borné, alors I est fermé :

V	F
---	---
5. Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble infini :

V	F
---	---
6. Un intervalle de longueur nulle est vide :

V	F
---	---

Exercice 12

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dira que A vérifie la propriété P lorsque l'on a : $(\forall (x, y) \in A^2) (\frac{x+y}{2} \in A)$.

Montrer que tout intervalle de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété P . Donner un exemple de partie de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété P mais qui n'est pas un intervalle.

Exercice 13

1. Pour x dans $\mathbb{R}$ on note $A_x = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$ et $B_x = \{r \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$. Démontrer que $x = \sup A_x = \inf B_x$.
2. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(r) = r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$, différente de l'identité.

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que $f(r) = r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Démontrer que $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

5 Correction des exercices

Exercice 1

1. • Pour tout x réel on a $0 \leq x^2 < x^2 + 1$ donc on a $0 \leq f(x) < 1$ et ainsi $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, [0; 1])$.

Pour x réel, posons $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + 1)$. On a $0 \leq f(x) < 1$ donc $1 \leq f(x) + 1 < 2$ donc $\frac{1}{2} \leq g(x) < 1$. Il en résulte que g est un élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0; 1])$. Enfin on a pour tout x réel $f(x) \leq g(x)$ donc $f \leq g$ et ainsi g est un majorant de f dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0; 1])$.

2. • Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0; 1])$ admettent un plus grand élément f . On pose encore pour $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + 1)$. Comme précédemment on a défini un élément g de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0; 1])$ tel que $g < f$ ce qui constitue une contradiction. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0; 1])$ **n'admet pas de plus grand élément**.

NB : $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0; 1])$ admet une borne supérieure dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est la fonction constante $x \mapsto 1$.

• Pour tout f dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0; 1])$ on a clairement $f \geq 0$ et comme la fonction constante de valeur nulle est un élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, [0; 1])$ on peut affirmer que ce dernier ensemble admet un plus petit élément qui est la fonction nulle. $\square$

Exercice 2

1. La réponse est NON. Par exemple on a $\mathbf{E}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 1$ alors que $\mathbf{E}(\frac{1}{2}) = 0$.
2. Si $n = \mathbf{E}(x)$ alors $n \leq x < n + 1$ et on a :
— ou bien $x = n$ et alors $-x = -n$ ce qui donne $\mathbf{E}(-x) = -n$;
— ou bien $x \neq n$ et alors $-n - 1 < -x < -n$ ce qui donne $\mathbf{E}(-x) = -n - 1$.

En définitif on peut dire que si $\mathbf{E}(x) = x$ alors $\mathbf{E}(-x) = -\mathbf{E}(x)$ et si $\mathbf{E}(x) \neq x$ alors $\mathbf{E}(-x) = -\mathbf{E}(x) - 1$. $\square$

Exercice 3

1. Si $n = 0$ ou 1 , c'est évident. Si maintenant $n \geq 2$ est un entier on a :

$$2^n = (1+1)^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 1 + n + \underbrace{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k}}_{\text{termes positifs}}$$

donc $2^n \geq 1 + n > n$ ce qui démontre l'inégalité souhaitée.

2. Si $n \geq 2$ entier vérifie $2^n + 1 \geq n^2$ alors $2^{n+1} + 2 \geq 2n^2$ donc $2^{n+1} + 1 \geq 2n^2 - 1$. On regarde alors pour quelles valeurs de n entier on a $2n^2 - 1 \geq (n+1)^2$. Mais on a

$$2n^2 - 1 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 2 \geq 0$$

Si on considère le trinôme $x^2 - 2x - 2$ on a $\Delta = 12$ et ce trinôme a deux racines

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = 1 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = 1 + \sqrt{3} \approx 2,7$$

Ainsi lorsque $n \geq 3$ on aura $2n^2 - 1 \geq (n+1)^2$ et la propriété $2^n + 1 \geq n^2$ est héréditaire lorsque $n \geq 3$.

Pour $n = 0, 1$ ou 2 cette propriété est évidente et on procède donc par récurrence sur $n \geq 3$ pour les autres valeurs de n .

3. Si $n = 0$ ou 1 , c'est évident. Puis on a pour $x \geq 0$ réel et $n \geq 2$ entier :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \underbrace{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^k}_{\text{termes positifs}}$$

donc $(1+x)^n \geq 1 + nx$. □

Exercice 4

1. On écrit pour n entier naturel $\frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Ainsi A n'est autre que $u(\mathbb{N})$ où u est la suite définie par $u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Cette suite est strictement décroissante et converge vers 0 car $0 < \frac{2}{3} < 1$. On en déduit immédiatement :

$$\inf A = 0 \quad \text{et} \quad \sup A = u_0 = \frac{1}{3}$$

2. A est minoré par 0 et non vide : il admet une borne inférieure. Puis on étudie la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont l'image est exactement

l'ensemble A . Cette fonction admet un minimum en 1 qui est 2 : c'est donc le plus petit élément de A : $\exists \min A = 2$. Mais les limites en 0 et $+\infty$ permettent de voir que A n'admet pas de borne supérieure.

3. On a $\exists \inf A = 0$ mais A n'admet pas de minimum. Puis A est clairement majoré par 1 et c'est même sa borne supérieure (faire tendre, pour $m = 1$, n vers $+\infty$). Mais $1 \notin A$. □

Exercice 5

1. Pour x réel, x appartient à $A + B$ si et seulement si il existe a dans A et b dans B tels que $x = a + b$.

2. • Comme A et B sont non vides, on dispose de a dans A et de b dans B . Ainsi $x = a + b$ est un élément de $A + B$ et ce dernier est un ensemble non vide. Puis si $x \in A + B$, il existe a dans A et b dans B tels que $x = a + b$. Mais A et B sont de parties majorées et non vides de $\mathbb{R}$; selon l'axiome de la borne supérieure, elles admettent une borne supérieure. On a alors $x \leq \sup A + \sup B$ et ainsi $A + B$ est majoré : il admet donc une borne supérieure avec :

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$$

- Posons $M = \sup A + \sup B$. Ce réel M majore $A + B$. Puis soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors a et b dans A et B respectivement tels que :

$$\sup A \leq a - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sup B \leq b - \frac{\varepsilon}{2}$$

On a alors $M \leq a + b - \varepsilon$. En conclusion, M est un majorant de $A + B$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in A + B$ tel que $M \leq x - \varepsilon$: selon un théorème de leçon on a $M = \sup(A + B)$. □

Exercice 6

1. F : *Que pensez-vous de $\emptyset$?*
2. F : *Complètement idiot...*
3. V : *Et même mieux : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.*
4. V : *c'est le cours...* □

Exercice 7

• Comme A est non vide et majorée, on est assuré que $\exists \sup A = M$ en vertu de l'axiome de la borne supérieure.

• Comme A est non vide, il existe $a \in A$. Mézalors $x = -a$ est bien un élément de $-A$: ce dernier est donc non vide. Puis si $x \in -A$ alors $-x \in A$ donc

$-x \leq M$ et ainsi $x \geq -M$: l'ensemble $-A$ est donc minoré par $-M$.

• Prenons maintenant un minorant μ de $-A$. Pour a dans A on a alors $-a \in -A$ et ainsi $-a \geq \mu$ donc $a \leq -\mu$; on peut donc dire que $-\mu$ est un majorant de A . Mais M est le plus petit des majorants de A ; on a donc $M \leq -\mu$ ce qui assure que $-M \geq \mu$. Il en résulte que $-M$ est le plus grand des minorants de $-A$: $\exists \inf(-A) = -M$. $\square$

Exercice 8

Notons que A et B sont des parties non vide et majorées de $\mathbb{R}$ donc, en vertu de l'axiome de la borne supérieure, $\exists \sup A$ et $\exists \sup B$.

1. Si $x \in A$ alors $x \in B$ donc $x \leq \sup B$. Ainsi $\sup B$ est un majorant de A et comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A on a :

$$\sup A \leq \sup B$$

2. • Si $x \in A \cup B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$ donc $x \leq \sup A$ ou $x \leq \sup B$ d'où

$$x \leq \max(\sup A, \sup B).$$

On est donc assuré que $A \cup B$ est majoré par $\max(\sup A, \sup B)$.

• Soit maintenant M est un majorant de $A \cup B$. Si $x \in A$ on a $x \in A \cup B$ donc $x \leq M$ est ainsi M est un majorant de A donc, par définition de $\sup A$ (qui est le plus petit des majorants de A) on a : $\sup A \leq M$. De même on obtient $\sup B \leq M$ et on peut donc dire que :

$$\max(\sup A, \sup B) \leq M$$

En conclusion, $\max(\sup A, \sup B)$ est le plus petit des majorants de $A \cup B$ ce qui assure que :

$$\exists \sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$$

3. • Si $x \in A \cap B$ alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \leq \sup A$ et $x \leq \sup B$; ainsi $x \leq \min(\sup A, \sup B)$ donc $A \cap B$ est majoré par :

$$\min(\sup A, \sup B)$$

Si $A \cap B$ est non vide, $A \cap B$ admettra une borne supérieure et on aura :

$$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$$

Mais l'égalité n'est pas forcément vérifiée : prendre pour cela $A = [1, 3]$ et $B = \{0, 1, 4\}$. On a $\sup A = 3$, $\sup B = 4$ et $A \cap B = \{1\}$. $\square$

Exercice 9

1. Soit $b_0 \in B$. Pour tout a dans A on a $a \leq b_0$: l'ensemble A est majoré. Comme il est non vide, l'axiome de la borne supérieure assure que $\exists \sup A$. De même B est non vide et minoré par tout élément de A donc $\exists \inf B$.

2. Tout élément de B majore A et $\sup A$ est le plus petit des majorants de A donc $\sup A \leq b$ pour tout b dans B . Ainsi $\sup A$ est un minorant de B . Comme $\inf B$ est le plus grand des minorants de B on a : $\sup A \leq \inf B$. $\square$

Exercice 10

• Tout d'abord A et B sont non vide donc il existe $a \in A$ et $b \in B$. Le produit ab est alors un élément de AB et ce dernier est un ensemble non vide.

• Montrons maintenant que AB est majoré. Comme A est non vide et majoré, en vertu de l'axiome de la borne supérieure, il admet une borne supérieure $\sup A$. De même $\exists \sup B$. Puis prenons x dans AB . On peut écrire $x = ab$ où a et b sont des éléments de A et B respectivement. Mézalors on a $a \leq \sup A$ et $b \leq \sup B$. Comme a et b sont positifs, on obtient par produit :

$$ab \leq (\sup A) \times (\sup B) \quad \text{i.e.} \quad x \leq (\sup A) \times (\sup B)$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout x dans AB , ce dernier est un ensemble majoré et il admet une borne supérieure qui vérifie :

$$\sup AB \leq (\sup A) \times (\sup B)$$

• On conjecture nettement que $\sup AB = (\sup A) \times (\sup B)$. Il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers $\sup A$ et il existe une suite (b_n) d'éléments de B qui converge vers $\sup B$. La suite $x_n = a_n b_n$ converge donc par produit vers $(\sup A) \times (\sup B)$ et comme ce dernier réel majore $A \times B$, c'est sa borne supérieure :

$$\sup AB = (\sup A) \times (\sup B)$$

Exercice 11

Vrai ou Faux ?

1. V : une intersection de convexe est encore un convexe...
2. F : Pensez à $\mathbb{R}^*$.
3. F : Pensez à l'intervalle $I = \{0\}$.
4. F+F : Pensez dans le premier cas à $[0, +\infty[$ et dans le second cas à $]0, 1[$.
5. F : Pensez aux singletons...
6. F : La longueur de l'intervalle I d'extrémités a et b réelles est $\text{long}(I) = |b - a|$. En prenant un singleton on obtient un intervalle de longueur nulle. $\square$

Exercice 12

- Soit I un intervalle. Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe donc si x et y sont dans I , le segment $[x, y]$ est inclus dans I et son milieu, $\frac{x+y}{2}$ appartient donc à I .
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ vérifie cette propriété et ce n'est pas un intervalle. En effet, si x et y sont deux rationnels, $\frac{x}{2}$ et $\frac{y}{2}$ sont aussi des rationnels et il en va de même de leur somme. $\square$

Exercice 13

1. Tout d'abord x majore A_x . Puis supposons qu'il existe M majorant de A_x tel que $M < x$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ on peut trouver un rationnel

r dans l'intervalle $]M, x[$; ainsi on dispose de r dans A_x tel que $r > M$ ce qui contredit le statut de majorant de M . Ainsi x est le plus petit des majorants de A_x : $\exists \sup A_x = x$.

On montre de même $\exists \inf B_x = x$.

2. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ si rationnel et $f(x) = 0$ si x est irrationnel.
3. Soit x un réel. On veut montrer que $f(x) = x$. Pour tout r dans A_x on a $f(r) = r$ et $f(x) \geq f(r)$ par croissance de f donc $f(x)$ majore A_x et ainsi $f(x) \geq \sup A_x = x$. On montre de même que $f(x)$ minore B_x ce qui amène $f(x) \leq x$. En définitif on a bien $f(x) = x$. $\square$