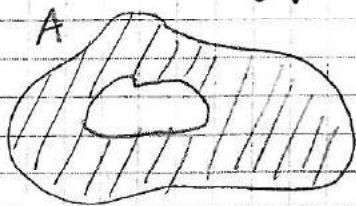


Chapitre 19 : Intégration.

Introduction.

Soit A la figure



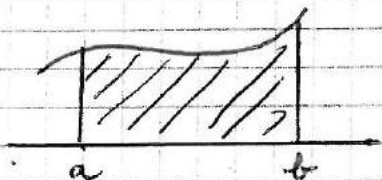
Qu'est-ce que l'aire de A ?

Pour approximer l'aire de la première figure
[définir]

on peut y mettre des rectangles à l'intérieur et de regarder l'aire de tous ces rectangles.

la notion d'aire est compliquée - il y a plusieurs façons de définir une aire.

En TS on voit pour f, C^0 positive $\int_a^b f(t) dt =$ "Aire sous la courbe".
def.



Mais justement quelle est cette aire ?

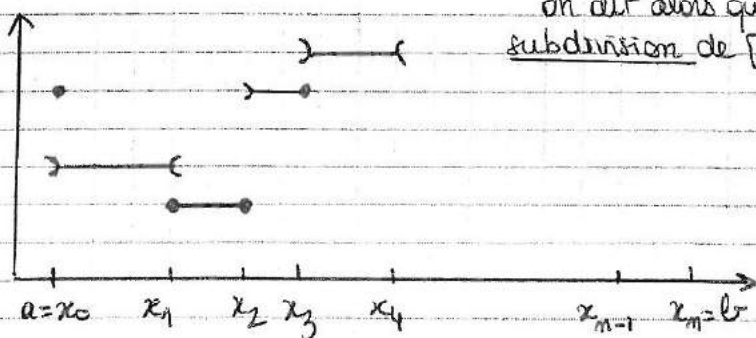
Objectif du chapitre = Définir l'intégrale d'une fonction sur un segment, pas forcément continue, "sous référence" à "l'aire sous la courbe".

I. Fonctions en escaliers, C^0 -PM, approximation

Dans tout le chapitre, sauf mention contraire, a, b sont des réels avec $a < b$.

1. Fonctions en escalier.

Définition = Une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier lorsqu'il existe $x_0, x_1, \dots, x_n$ dans $[a, b]$ avec $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ tels que $\varphi|_{[x_k, x_{k+1}[} = \lambda_k \in \mathbb{R}$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$.



on dit alors que $\{x_0, \dots, x_n\}$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à φ .

On note $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier _{de} $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque =

1) Dès que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ est une subdivision adaptée à $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$

alors en rajoutant y entre deux x_k on obtient une nouvelle subdivision adaptée

2) La classe des fonctions en escalier $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ est :

① Stable par CI (i.e. $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel)

② Stable par produit.

③ Stable par l'opération $\varphi \mapsto |\varphi|$ donc en particulier stable par :

$$(f, g) \mapsto \sup(f, g)$$

$$(f, g) \mapsto \inf(f, g)$$

$$(\text{Rappel : } \sup(a, b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) \text{ pour } a, b \text{ réels.})$$

Démontrons par exemple que la somme de deux fonctions en escalier est encore en escalier.

Def = Prendre une subdivision adaptée aux deux fonctions

Preuve : Soient $f \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$

Soit Δ une subdivision adaptée à f .

Δ' une subdivision adaptée à g .

$\Delta \cup \Delta'$ est alors adaptée à f et g .

Il existe alors, si $\Delta \cup \Delta'$ est la subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$,

$$\begin{matrix} \lambda_k \in \mathbb{R} \\ \mu_k \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} f|_{]x_k, x_{k+1}[} = \lambda_k \\ g|_{]x_k, x_{k+1}[} = \mu_k \end{cases} \quad \text{pour tout } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

$$\text{et on } f+g|_{]x_k, x_{k+1}[} = \lambda_k + \mu_k \text{ donc } f+g \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$$

2. des fonctions continues par morceaux sur $[a; b]$.

Définition = Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux

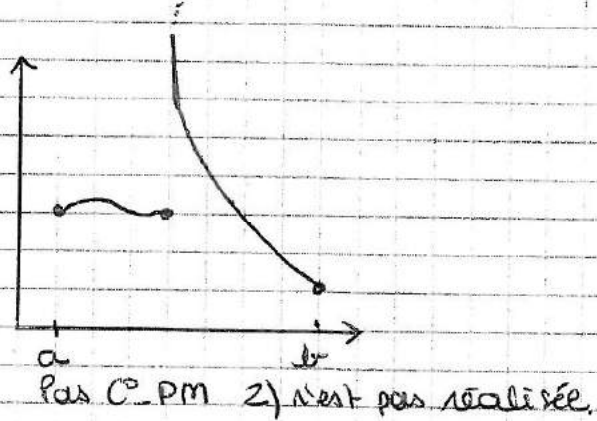
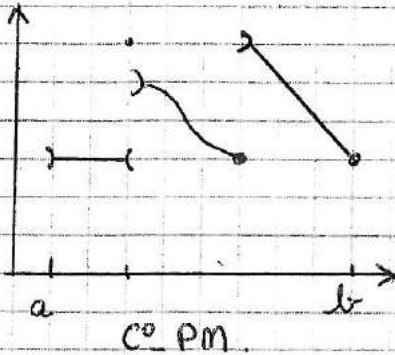
sur $[a; b]$ lorsqu'il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ de $[a; b]$ telle que =

1) $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ est C^0 .

2) $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ est prolongeable par continuité à $[x_k, x_{k+1}]$

On note $C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

NB:



Remarque:

La classe $C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{R})$ est :

1) Stable par CI donc $C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -év.

2) Stable par produit

3) Stable par: $f \mapsto |f|$

$(f, g) \mapsto \sup(f, g)$

$(f, g) \mapsto \inf(f, g)$

[Def] - Pour démontrer ces résultats :

Si λ est adaptée à f alors $\mu\lambda'$ est adaptée à $f \otimes g$.
 λ' est adaptée à g

Théorème 1 :

Une fonction $C^0\text{-PM}$ sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.

En particulier si $f \in C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{R})$ alors :

$\exists \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ et $\exists \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Preuve :

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $C^0\text{-PM}$. Il existe $x_0, \dots, x_m$ dans $[a, b]$ avec $a = x_0 < \dots < x_m = b$.

1) $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ est C^0 .

2) $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ est prolongeable par continuité au segment $[x_k, x_{k+1}]$ en une

fonction g_k .

Chaque g_k est C^0 sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$ donc est bornée (et atteint ses bornes) par M_k .

Si $M = \max\{M_0, \dots, M_{n+1}, |f(x_0)|, |f(x_1)|, \dots, |f(x_n)|\}$ alors M borne f .

En effet, si $x \in [a, b]$ alors $\rightarrow$ Soit x appartient à l'un des intervalles

$]x_k, x_{k+1}[$ et alors $|f(x)| = |g_k(x)| \leq M_k \leq M$.

$\rightarrow$ Soit x est un des x_k et donc

$$|f(x)| = |f(x_k)| \leq M.$$

Enfin $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ est non vide et majorée par M , il admet donc une borne sup et une borne inf.

une borne sup et une borne inf.

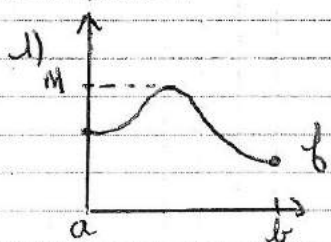
Une notation:

données: I intervalle de $\mathbb{R}$
 $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ bornée

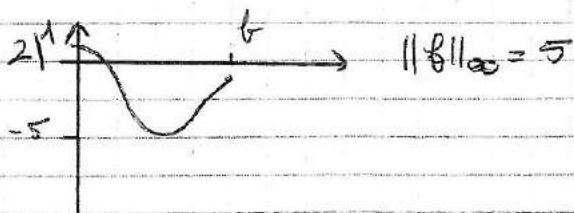
Alors $\exists \sup_{x \in I} |f(x)|$

On note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$ (marche aussi pour x ensemble)
norme infinie de f . $f: x \rightarrow \mathbb{C}$

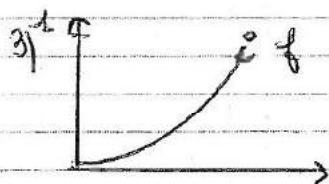
Exemples:



$$\|f\|_\infty = M.$$



$$\|f\|_\infty = 5.$$



$$\text{ici } I = [0, 1] \quad \|f\|_\infty = 1.$$

La $\|f\|_\infty$ se trouve en évidence dans le tableau de variation.

3. de résultat d'approximation

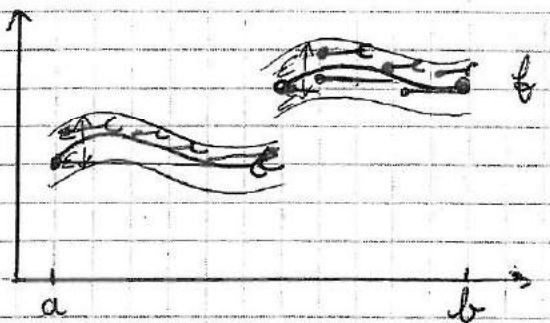
Théorème 2 = (admis)

Toute fonction C^0 -PM sur $[a, b]$ se laisse approchée uniformément sur $[a, b]$ par des fonctions en escalier.

Autrement dit pour tout f dans $C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$,

il existe $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ tq =
 $(\forall x \in [a, b]) (|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon)$
 $\Leftrightarrow \|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon.$

Exemple:



Corollaire:

Soit $f \in C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{R})$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ en escalier sur $[a, b]$.

tq $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$

$|\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon| \leq \varepsilon$ ie $(\forall x \in [a, b]) (|\varphi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon)$
 ie $\|\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon.$

Preuve du corollaire:

D'après le th 2, il existe χ en escalier sur $[a, b]$ tq =

$$\|f - \chi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ie $(\forall x \in [a, b]) (|f(x) - \chi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2})$

ie $(\forall x \in [a, b]) (\chi(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq \chi(x) + \frac{\varepsilon}{2})$

on pose $\begin{cases} \varphi = \chi - \frac{\varepsilon}{2} \\ \psi = \chi + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

Ainsi pour tout $x \in [a, b] : 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon.$

donc $\|\psi - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$ ■

II - Intégration sur un segment.

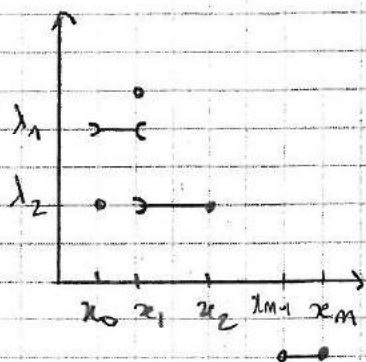
1 - la pré-intégrale.

Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$.

On dispose donc d'une subdivision :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \text{ de } [a; b]$$

$$\text{tg} = \varphi|_{[x_k, x_{k+1}]} = \lambda_k \text{ pour } k \in \{0, \dots, n-1\}$$



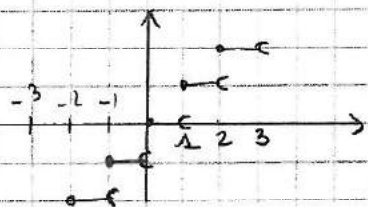
$$\text{la somme } \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (x_{k+1} - x_k)$$

aire algébrique des rectangles
ne dépend pas du choix d'une
subdivision adaptée à φ et on la note :

$$\text{Int}_{a,b}(\varphi) = \int_a^b \varphi(t) dt$$

Exemple =

$$\text{Calculons } \text{Int}_{-2,3}(E) = \int_{-2}^3 E(t) dt \text{ où } E \text{ pousse entière.}$$



$$\text{Int}_{-2,3}(E) = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 = 0.$$

Remarque :

1) Si φ est en escalier sur $[a; b]$ on ne change pas $\int_a^b \varphi(t) dt$ en modifiant φ en un nombre fini de points.

2) On a donc une application : $\text{Int}_{a,b} = \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \int_a^b \varphi(t) dt \end{array} \right)$

appelée pré intégrale qui vérifie les propriétés suivantes.

a) $\text{Int}_{a,b}$ est linéaire.

b) $\text{Int}_{a,b}$ est croissante ie si φ, ψ sont dans $\mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$

avec $\varphi \leq \psi$ alors : $\text{Int}_{a,b}(\varphi) \leq \text{Int}_{a,b}(\psi)$

$$c) \left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

$$d) \text{ Relation de Chasles. Pour } x \in [a; b], \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^x \varphi|_{[a,x]}(t) dt + \int_x^b \varphi|_{[x,b]}(t) dt.$$

$$\text{que l'on écrit par abus : } \int_a^b \varphi = \int_a^x \varphi + \int_x^b \varphi.$$

Preuve = a), b) et d) découlent des propriétés des sommes finies.

Pour les démontrer on prend une subdivision adaptée aux deux fonctions

c) on a: $\underbrace{-|\varphi|}_{\text{en escalier}} \leq \varphi \leq \underbrace{|\varphi|}_{\text{en escalier}}$

en escalier

en escalier.

Par croissance de la pré-intégrale $-\int_a^b |\varphi(t)| dt \leq \int_a^b \varphi(t) dt \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt$

donc $\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt$

3) Si $\varphi \geq 0$, en escalier:

$\text{Int}_{a,b}(\varphi)$ = aine des rectangles.

2. Extension de la pré-intégrale

Soit f une fonction dans $C^0\text{-PM}([a; b], \mathbb{R})$. on note =

$$I^+ = \left\{ \text{Int}_{a,b}(\varphi) \mid \varphi \text{ en escalier sur } [a; b] \text{ et } f \leq \varphi \right\}$$

$$I^- = \left\{ \text{Int}_{a,b}(\varphi) \mid \varphi \text{ en escalier sur } [a; b] \text{ et } \varphi \leq f \right\}$$

on a $I^+ \subset \mathbb{R}$

$I^- \subset \mathbb{R}$

la fonction f étant $C^0\text{-PM}$ sur $[a; b]$ est bornée sur $[a; b]$ (Th 1).

on pose alors $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x)$ et $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$

de réel $\text{Int}_{a,b}(\varphi)$ et $\varphi = M$ appartient à I^+ donc I^+ est non vide. Puis si $\lambda \in I^+$ on dispose de φ en escalier $\geq f$ tq:

$$\lambda = \text{Int}_{a,b}(\varphi)$$

comme $\varphi \geq f \geq m$ - on a $\text{Int}_{a,b}(\varphi) \geq \text{Int}_{a,b}(m) = m(b-a)$

donc $\lambda \geq m(b-a)$

donc I^+ est minorée = comme $I^+ \neq \emptyset$

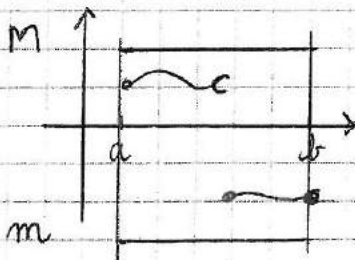
alors $\exists \inf I^+ = \beta \in \mathbb{R}$.

(axiome de la borne inférieure)

• De même (exo)

I^- admet une borne supérieure α

On a $\boxed{\alpha \leq \beta}$



En effet, si φ en escalier et $tq = \varphi \leq f$

alors dès que φ_0 en escalier sur $[a, b]$ vérifie $\varphi_0 \geq f$ on a

$$\varphi \leq \varphi_0 \text{ donc } \underline{\text{Int}}_{a,b}(\varphi) \leq \underline{\text{Int}}_{a,b}(\varphi_0)$$

Ceci étant vrai pour toute φ en escalier tq $\varphi \leq f$.

On peut dire que $\underline{\text{Int}}_{a,b}(\varphi_0)$ majore I^- .

α étant le plus petit des majorants de I^- on a :

(*) $\alpha \leq \underline{\text{Int}}_{a,b}(\varphi_0)$ - Mais (*) est vraie pour tout φ_0 en escalier tq $\varphi_0 \geq f$ donc α minore I^+ donc $\boxed{\alpha \leq \beta}$

Mais selon le corollaire du Th 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe φ_n, ψ_n en escalier

$$\text{sur } [a, b] \text{ tq} = \begin{cases} \varphi_n \leq f \leq \psi_n \\ \forall x \in [a, b] \quad |\varphi_n(x) - \psi_n(x)| \leq 2^{-n} \end{cases}$$

$$\text{donc } \underline{\text{Int}}_{a,b}(\varphi_n - \psi_n) = \underbrace{\underline{\text{Int}}_{a,b}(\varphi_n)}_{\in I^+} - \underbrace{\underline{\text{Int}}_{a,b}(\psi_n)}_{\in I^-}$$

$2^{-n}(b-a) \geq \rightarrow$ croissance de la pré-intégrale.

$$\text{donc } \underline{\text{Int}}_{a,b}(\varphi_n) \geq \beta$$

$$\underline{\text{Int}}_{a,b}(\psi_n) \leq \alpha$$

$$\text{ainsi } \underline{\text{Int}}_{a,b}(\varphi_n) - \underline{\text{Int}}_{a,b}(\psi_n) \geq \beta - \alpha$$

$$\text{donc } 2^{-n}(b-a) \geq \beta - \alpha \geq 0$$

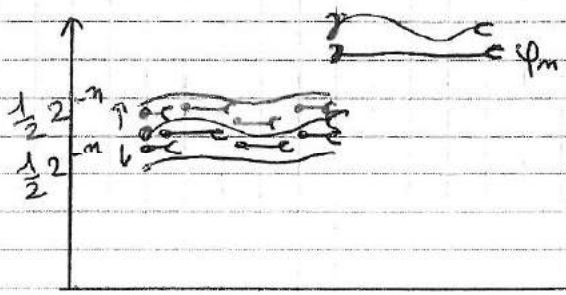
Ceci étant vrai pour tout n , on obtient par SANDWICH.

$$\beta - \alpha = 0.$$

$$\text{On pose alors } \boxed{\int_a^b f(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \alpha (= \beta)}$$

Remarque :

1) Si f est C^p-PM et ≥ 0 .



on veut de définir l'expression: aire sous la courbe.

C'est la limite commune des $\text{Int}_{a,b}(\varphi_n)$ et $\text{Int}_{a,b}(\psi_n)$

2) De la définition de $\int_a^b f(t) dt$ par $f \in C^0\text{-PM}$ on peut dire de

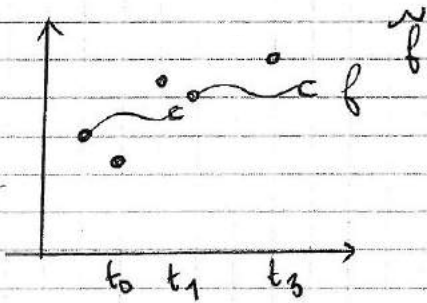
suite que = si φ en escalier est $\leq f$.

si ψ en escalier est $\geq f$.

$$\text{alors } \int_a^b \varphi(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b \psi(t) dt.$$

3) Si on modifie $f \in C^0\text{-PM}([a,b], \mathbb{R})$ en un nombre fini de pts elle reste $C^0\text{-PM}$. On ne change pas $\int_a^b f(t) dt$.

En effet, soit $\tilde{f}$ obtenue de f en modifiant f aux points $t_0, \dots, t_p$ dans $[a,b]$.



Si φ en escalier sur $[a,b]$ vérifie $\varphi \leq f$.

$$\text{On pose } \tilde{\varphi}(t_k) = \tilde{f}(t_k)$$

$\tilde{\varphi} = \varphi$ ailleurs que sur les t_k .

$$\text{on a } \tilde{\varphi} \text{ en escalier et } \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \tilde{\varphi}(t) dt$$

$$\text{Ainsi } \int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \tilde{\varphi}(t) dt.$$

Par définition de $\int_a^b \tilde{f}(t) dt$ on a ainsi =

$$\int_a^b \tilde{f}(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt.$$

On fait la même MAGOUILLE avec les φ en escalier $\geq f$.

4) On a donc définie une application:

$$I = \left(\begin{array}{c} C^0\text{-PM}([a,b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_a^b f(t) dt \end{array} \right)$$

qui prolonge $\text{Int}_{a,b}$.

3. Premières propriétés.

Théorème 3 = [a, b]

- 1) l'appl^e I ci-dessus est linéaire.
- 2) I est croissante : si $f \leq g$ dans $C^0\text{-PM}([a; b], \mathbb{R})$ alors :
$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$
- 3) Pour $f \in C^0\text{-PM}([a; b], \mathbb{R})$
$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$
- 4) Chasles

Preuve =

- 1) Poly.
- 2) Comme ci-dessus.

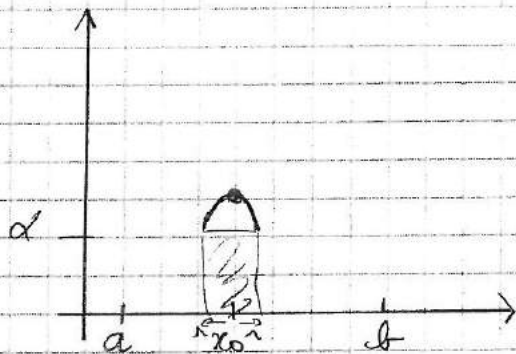
Théorème 4 =

Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $C^0\text{-PM}$ tq $f \geq 0$ et $\int_a^b f(t) dt = 0$.
Alors f est nulle sauf peut-être en ses points de discontinuité.

Preuve =

Si f est C^0 en x_0 on montre que : $f(x_0) = 0$.

si $x_0 \in]a; b[$, si f est C^0 en x_0 , raisonnons par l'absurde et supposons que $f(x_0) > 0$.



Il existe alors $\alpha > 0$ et $r > 0$ tq : $[x_0 - r, x_0 + r] \subset [a; b]$
et $(\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]) (f(x) \geq \alpha)$

donc = $\int_a^b f(t) dt \geq \int_{x_0-n}^{x_0+n} f(t) dt \geq \int_{x_0-n}^{x_0+n} \alpha dt = 2n\alpha \quad [\geq 0] \text{ absurde!}$

Si x_0 est borne de $[a; b]$ on adapte le raisonnement $\blacksquare$.

Corollaire 1: $\heartsuit \heartsuit \heartsuit$

Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue et ≥ 0 tq $\int_a^b f(t) dt = 0$.
alors $f = 0$.

Corollaire 2: Intégration des inégalités strictes.

Soit $\begin{cases} f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

CONTINUES avec = 1) $f \leq g$

2) $(\exists t_0 \in [a; b]) (f(t_0) < g(t_0))$

Conclusion:

$$\int_a^b f(t) dt < \int_a^b g(t) dt$$

Preuve = Par l'absurde.

① Si $\int_a^b f = \int_a^b g$ alors $\int_a^b (g-f) = 0$.

Mais $\begin{cases} g-f \text{ est } C^0 \text{ sur } [a; b] \\ \boxed{g-f \geq 0} \end{cases}$

donc $g-f = 0$ ie $g = f$ sur $[a; b]$ ABSURDE $\blacksquare$.

4. Intégration des fonctions complexes

Si $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ on écrit $f = f_1 + if_2$

où $\begin{cases} f_1: [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f_2: [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

On dira que f est continue par morceaux sur $[a; b]$.

lorsque f_1 et f_2 le sont. On note $C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $C^0\text{-PM}$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$.

Remarque:

La classe $C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{C})$ est :

→ stable par $\mathbb{C}$ complexe.

→ stable par produit.

Pour $f \in C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{C})$, par définition :

$$\int_a^b f = \int_a^b f_1 + i \int_a^b f_2.$$

→ l'intégrale : $I = \left(\begin{array}{ccc} C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{C}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \int_a^b f \end{array} \right)$ vérifie :

→ I linéaire.

→ la relation de Charles.

Parler de croissance de I n'a plus de sens = pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ compatible avec la structure de corps de $\mathbb{C}$.

5. Des inégalités fondamentales. + démo

Théorème 5 :

Si $f \in C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{C})$ alors :

$$\underbrace{\left| \int_a^b f(t) dt \right|}_{\in \mathbb{R}} \leq \int_a^b \underbrace{|f(t)|}_{\in \mathbb{R}^+} dt$$

Preuve :

Cas 1 : f à valeurs réelles. On a alors : $\underbrace{-|f|}_{C^0\text{-PM}} \leq \underbrace{f}_{C^0\text{-PM}} \leq \underbrace{|f|}_{C^0\text{-PM}}$.

Par croissance et linéarité de l'intégrales des fonctions réelles :

$$\text{donc : } \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

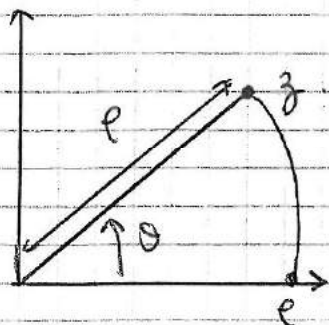
Cas 2 : cas générale.

On pose : $z = \int_a^b f(t) dt \in \mathbb{C}$.

→ Si $z=0$ le résultat est évident!

(chap 14, 4)

→ Sinon, on écrit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$
 $\rho \in \mathbb{R}$.
 $\rho = |z| = \left| \int_a^b f \right|$



$$\begin{aligned} e^{-i\theta} z &= \rho \in \mathbb{R}^+ \\ \text{donc} &= e^{-i\theta} z = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} z) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\int_a^b e^{-i\theta} f(t) dt\right) \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t)) dt \end{aligned}$$

NB = Si $z = \alpha + i\beta$ avec ...

$$\operatorname{Re}(z) = \alpha \leq |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\text{donc} = \underbrace{\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t))}_{\in \mathbb{R}} \leq \underbrace{|e^{-i\theta} f(t)|}_{\in \mathbb{R}} = |f(t)| \text{ pour tout } t \in [a, b].$$

Pour l'encadrement de l'intégrale des fonctions réelles on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)e^{-i\theta}) dt &\leq \int_a^b |f(t)| dt \\ &= \rho = \left| \int_a^b f(t) dt \right| \quad \blacksquare \end{aligned}$$

NB = Si $f \in C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{C})$ alors f est bornée.

Car si $f = f_1 + if_2$ avec ...

$$\text{alors } |f|^2 \leq |f_1|^2 + |f_2|^2$$

et f_1 et f_2 sont bornées car $C^0\text{-PM}$

donc on peut parler de $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Théorème 6 = Inégalité de Cauchy moyenne.

Si $f, g \in C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{C})$ alors

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \underbrace{\|f\|_\infty}_{\sup_{x \in [a, b]} |f(x)|} \int_a^b |g(t)| dt.$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \text{On a: } \left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| &\stackrel{\text{Th 5}}{\leq} \int_a^b \underbrace{|f(t)|}_{\leq \|f\|_\infty} |g(t)| dt \leq \int_a^b \|f\|_\infty |g(t)| dt \\ &= \|f\|_\infty \int_a^b |g(t)| dt. \end{aligned}$$

Remarque:

1) On a, avec les mêmes notations:

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty (b-a) \quad (*)$$

En particulier si $g=1$.

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \|f\|_\infty (b-a)$$

2) la majoration (*) est très grossière - peut-on être plus subtile?

Théorème 7 = CAUCHY-SCHWARZ - BOWIAKOWSKY.

Soient f, g dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$ Alors:

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}$$

Preuve = IMPORTANTISSIMME.

On fait une preuve variationnelle.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$0 \leq \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2 dt = \underbrace{\lambda^2 \int_a^b f(t)^2 dt + 2\lambda \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b g(t)^2 dt}_{T(\lambda)}$$

donc que $\int_a^b f(t)^2 dt \neq 0$, $T(\lambda)$ est un trinôme du second degré en λ .
à coeff dominant ≥ 0 qui est toujours ≥ 0 .

$\Delta \leq 0$

$$\text{ie } \left(2 \int_a^b fg \right)^2 - 4 \int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leq 0.$$

Si maintenant $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$.

f^2 est nulle sauf en ses pts de discontinuité (en nombre fini).

donc f est nulle sauf en un nombre fini de pts.

$$f g \sim \sim \sim \sim \sim$$

donc $\int_a^b f g = 0$ et CSB est clairement vraie $\square$.

Remarque =

lorsque de plus $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ CONTINUE} \\ g \text{ CONTINUE} \end{array} \right.$

On a égalité dans CSB si et seulement si f, g proportionnelles.

En effet = Egalité dans CSB :

$$\Leftrightarrow \Delta = 0.$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, \int_a^b \underbrace{(\lambda_0 f(t) + g(t))^2}_{C^0, \text{ positif}} dt = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_0 f + g)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 f + g = 0.$$

III - Intégrales Primitives

convention : $\int_a^a f(t) dt = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{pour } a < b \\ f \in C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{C}) \end{array}$$

Charles est encore valable

la linéarité aussi.

1. DANGER - là où il y a des inégalités.

Par exemple la croissance pour l'intégrale $\int_b^a$ n'est plus valable
si $f \geq 0, \int_b^a f \leq 0$.

1. Dérivations des fonctions à valeurs complexes

si $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$), on écrit $f = f_1 + i f_2$

où $f_1: I \rightarrow \mathbb{R}$.

$f_2: I \rightarrow \mathbb{R}$.

f est dérivable lorsque f_1 et f_2 le sont.
On a alors $f' = f_1' + i f_2'$.

Question: Qu'est ce qui change par rapport à la dérivation des fonctions réelles ?

1) Les formules usuelles sont les mêmes, car :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{pour } a \in I$$

$f(x) - f(a) \in \mathbb{C}$

Somme, produit, exp, composition...

DB = par la def de la limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, on remplace :

$\underbrace{|\quad|}_{\text{val abs}}$ par $\underbrace{|\quad|}_{\text{module}}$

2) Rolle A = pas de sens (f à valeurs complexe admet un extremum est une explication STVP : RF)

$$\left(\begin{array}{l} f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \\ f \in D']a, b[\mathbb{R} \end{array} \right)$$

A. si f admet en $c \in]a, b[$ un extremum local alors $f'(c) = 0$.

B. si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tq $f'(c) = 0$.

3) Rolle B = n'est pas valable = ''

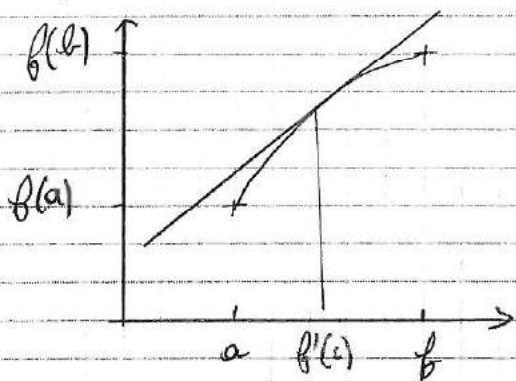
contre exemple : $f(t) = e^{it}$.

$$f(0) = f(2\pi) = 1$$

$$f'(t) = ie^{it} \quad \text{et} \quad |f'(t)| = |ie^{it}| = 1$$

4) les RF ponctuels.

Sous (*) il existe $c \in]a, b[$ avec : $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



de sont plus valable par :

$f: I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable comme il faut

(même contre-exemple)

TL n'est plus valable

5) des AF estimatoires restent valides.

(chap. 19, 2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } f \in \Delta^1(I, \mathbb{C}) \\ \text{si } \boxed{M \text{ borne } f' \text{ sur } I} \end{array} \right. \begin{array}{l} \leadsto |f'| \leq M. \\ \text{alors} \end{array}$$
$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a| \text{ pour tout } a, b \text{ dans } I.$$

Preuve: dur!

On peut montrer facilement $|f(b) - f(a)| \leq 2M|b - a|$ (*)

En effet si $f = f_1 + if_2$

$$\text{si } M \text{ borne de } f' \text{ alors } |f'|^2 \leq M^2$$
$$= (f'_1)^2 + (f'_2)^2$$

$$\text{donc } |f'_1| \leq M \text{ et } |f'_2| \leq M.$$

des AF estimatoires appliquées à f_1 et f_2 permettent de démontrer (*).

Conséquence:

si $f \in \Delta^1(I, \mathbb{C})$ avec $f' = 0$ sur I

alors $\boxed{f \text{ est constante}}$

6) T.I. reste vrai.

7) Primitives

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ (I intervalle)

une fonction $F: I \rightarrow \mathbb{C}$ sera une primitive de f lorsque:

$$F' = f.$$

Si F est une primitive de f sur I sont exactement les fonctions $F + z$ où z décrit $\mathbb{C}$.

• En effet chaque $F + z$ est primitive.

• Réciproquement si G est une primitive -

$$(G - F)' = f - f = 0 \text{ donc } G - F \text{ est constante dans } \mathbb{C}.$$

2. Lien entre intégrales et primitives

Théorème 8 =

Soit $f \in C^0\text{-PM}([a, b], \mathbb{C})$ alors :

$$F = \left([a, b] \rightarrow \mathbb{C} \right. \\ \left. x \mapsto \int_x^x f(t) dt \right)$$

où $x \in [a, b]$ est $\|f\|_\infty$ -lipschitzienne.

En particulier, elle est continue.

Preuve =

À montrer = $(\forall (x, y) \in [a, b]^2) (|F(x) - F(y)| \leq \|f\|_\infty |x - y|)$.

Prenons x, y dans $[a, b]$:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f - \int_x^x f \right| = \left| \int_x^y f \right| \leq \|f\|_\infty |x - y|$$

Théorème 9 = Fondamental

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue alors =

$$F = \left([a, b] \rightarrow \mathbb{C} \right. \\ \left. x \mapsto \int_x^x f(t) dt \right) \text{ où } x \text{ est arbitraire dans } [a, b] \text{ et}$$

de classe C^1 avec $F' = f$.

Preuve :

Pour $x_0 \in [a, b]$ on veut démontrer $\exists F'(x_0) = f(x_0)$ i.e. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$

Si $x \in [a, b]$ avec $x > x_0$ on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \left(\int_x^{x_0} f(t) dt - \int_x^{x_0} f(x_0) dt \right) - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)] dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt. \end{aligned}$$

Mais f est C^0 en x_0 .

Fixons $\varepsilon > 0$: il existe $\alpha > 0$ tq pour tout $t \in [a; b]$ tq.

$$|t - x_0| \leq \alpha \text{ on ait } |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Si maintenant $0 < x - x_0 \leq \alpha$ alors dès que $t \in [x_0, x]$ on aura :

$$|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

$$\text{donc, } \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \varepsilon dt = \varepsilon.$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

De même $\exists F'_g(x_0) = f(x_0)$ (exo...) d'où le résultat.

Corollaire 1 :

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ (I intervalle), continue.

Alors f admet des primitives sur I et ce sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \int_a^x f(t) dt + z$ où $z \in \mathbb{C}$.

Corollaire 2 : (FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS)

Si $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{C})$, $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f .

Preuve :

En effet si F est une primitive de f on écrit :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + z \quad \begin{matrix} \text{si } x \in \mathbb{C} \\ \text{si } x \in [a; b]. \end{matrix}$$

$$\text{Par Chasles on obtient } F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

Corollaire 3 : Important

Si f est C^1 sur $[a; b]$ alors $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$.

Remarque - il est essentiel que f' soit continue pour le corollaire 3 afin d'assurer que son intégrale existe.

Corollaire 6 : IPP

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } u, v \text{ sont } C^1 \text{ sur } [a, b] \text{ alors :} \\ \int_a^b u'v = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b uv' \end{array} \right\|$$

Preuve :

$F = uv$ est une primitive de $f = u'v + uv'$ qui est continue.

Exercice =

$$\begin{array}{l} \text{Soient } f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ u \in \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \end{array}$$

On peut considérer : $G = \left(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right.$
 $\left. x \mapsto \int_0^{u(x)} f(t) dt \right)$

Démontrer que G est Δ^1 et calculer sa dérivée.

 Soit $F = \left(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right.$
 $\left. x \mapsto \int_0^x f(t) dt \right)$ comme $\boxed{f \text{ est } C^0}$ sur $\mathbb{R}$, le théorème

fondamental affirme que F est de classe C^1 avec $F' = f$.

Puis $\boxed{G = F \circ u}$ Or u est dérivable; par composition G est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$G'(x) = F'(u(x)) \times u'(x) = f(u(x)) \times u'(x).$$

Exercice =

$$\begin{array}{l} \text{Soit } f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ u, v \text{ dans } C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \end{array}$$

Montrer que $G = \left(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right.$
 $\left. x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right)$ est C^1 et calculer G' .

$\rightarrow$ Pour $x \in \mathbb{R}$ $G(x) = \int_0^{v(x)} f(t) dt - \int_0^{u(x)} f(t) dt$.

Si $F = \left(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right.$
 $\left. x \mapsto \int_0^x f \right)$ alors, comme $\boxed{f \text{ est } C^0}$, F est de classe C^1 selon

le th fondamental avec $F' = f$.

et $G = F_{ov} - F_{ou}$.

donc G est de classe C^1 comme somme de fonction C^1 et.

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(v(x)) v'(x) - F'(u(x)) u'(x) \\ &= f(v(x)) v'(x) - f(u(x)) u'(x). \end{aligned}$$

Exemples:

1) Calculer $I = \int_0^1 \arctan x \, dx$ et $J = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$

2) Trouver une primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 $\arctan$ sur $\mathbb{R}$.

1) On pose $u'(x) = 1$ $v(x) = \arctan(x)$
 $u(x) = x$ $v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

on a u et v qui sont C^1 sur $[0; 1]$

$$\begin{aligned} \text{et } \int_0^1 \arctan x \, dx &= \left[x \arctan x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

$J = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$ u et v de classe C^1 avec :

$$\begin{aligned} u'(x) &= e^x & u(x) &= e^x \\ v(x) &= \cos x & v'(x) &= -\sin x. \end{aligned}$$

donc $J = \left[e^x \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x \, dx$

on pose $u'(x) = e^x$ $u(x) = e^x$.

$v(x) = \sin x$ $v'(x) = \cos x$.

donc $J = \left[e^x \cos x \right]_0^\pi + \left[e^x \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$

$2J = -e^\pi - 1 \Rightarrow J = -\frac{1}{2}(-e^\pi - 1)$

2) Comme $\ln$ est C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$ une primitive de $\ln$ est donnée par

$F(x) = \int_1^x \ln t \, dt \quad (x > 0)$

$u(x) = \ln x$ $u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 1$ $v(x) = x$

on a u, v qui sont C^1 d'où $F(x) = \left[x \ln x \right]_1^x - \int_1^x 1 \, dt = x \ln x - x + 1$.

On pose : $u'(t) = 1$ $v(t) = \arctan t$

$u(t) = t$

$v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$

u et v sont C^1 sur $[0; 1]$.

$$\text{et } \int_0^x \arctan t \, dt = \left[t \arctan t \right]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Remarque :

1) Pour calculer des intégrales du type :

$$\int P(x) e^x dx, \int P(x) \cos x dx, \int P(x) \sin x dx \text{ où } P \in \mathbb{C}[X]$$

on fait plusieurs IPP successives pour tuer le degré de P (on dérive P').

2) Quand on a suite définie par une intégrale : $I_n = \int f_n(t) dt$.

on peut obtenir une relation de réc entre les termes de la suite par IPP.

NB : les écritures du style $\int_0^x f(x) dx$ sont à éviter (générateur d'erreur)

Ecrire plutôt $\int_0^x f(t) dt$.

Changement de variable

de résultat.

Théorème 10 :

Soient I, J des intervalles de $\mathbb{K}$.

$f : J \rightarrow \mathbb{C}$ continue.

$u : I \rightarrow J$ de classe C^1 .

Pour α, β dans I , on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{f(u(t))}_{(1)} \times \underbrace{u'(t)}_{(2)} dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx$$

Preuve :

Soit $F : X \mapsto \int_{u(\alpha)}^x f(x) dx$ - Comme f est C^0 sur J , F est C^1 sur J et on a $F'(x) = f(x)$ pour $x \in J$.

Si maintenant $G = F \circ u$ alors G est C^1 par composition et on a :

$$G'(x) = (F \circ u)'(x) = F'(u(x)) \times u'(x).$$

$$\text{donc } \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{F'(u(t))}_{= f(u(t))} \times u'(t) dt = G(\beta) - G(\alpha) = \underbrace{F(u(\beta))}_{= \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx} - F(u(\alpha))$$

Remarques :

Pour passer de ① à ②, on remplace :

- $u(t)$ par x .

- $u'(t) dt$ par dx

- changement aux bornes

2. Des exemples.

1. Passage de ① à ②.

On utilise ce sens lorsque l'on reconnaît dans l'intégrale une expression de la forme : $f(u) \times u'$.

Ex 1 = $I = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t dt$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = x \mapsto x^2 \\ u(t) = \sin t \\ u'(t) = \cos t \end{array} \right\} \quad \text{on pose : } \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = (\cos t) dt \\ \text{si } t = 0 \text{ alors } x = 0 \\ \text{si } t = \frac{\pi}{2} \text{ alors } x = 1. \end{array}$$

$$\text{ce } I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Ex 2 = $J = \int_{-1}^2 \sqrt{4-u^2} u du$

on pose : $x = u^2$
 $dx = 2u du$
si $u = -1$ alors $x = 1$
si $u = 2$ alors $x = 4$

$$J = \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{4-x} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 (2-x)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{3} (4-x)^{3/2} \right]_1^4$$

$$J = \frac{1}{2} \left(+\frac{2}{3} (3)^{3/2} \right) = \sqrt{3}^3 \times \frac{1}{3}.$$

2. Passage de ② à ①.

On utilise ce sens pour rendre une intégrale plus sympathique.

Ex 1 = Calcul de $I = \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} dt$.

on pose : $t = \sin x$

$dt = \cos x dx$

$t = -1$, $x = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$t = 0$, $x = 0$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\sin^2 x} \cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 |\cos x| \cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1 + \cos 2x) dx \end{aligned}$$

Ex2 = calculer une primitive de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1; 1]$

Comme f est C^0 , une primitive de f sur $I = [-1; 1]$ est donnée par :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (x \in I)$$

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt \quad \text{On pose } t = \sin u \quad (t \in [-1; 1])$$

$$dt = \cos u du$$

$$\text{si } t=0, u = \arcsin t = 0.$$

$$t=x^{-1}, u = \arcsin x.$$

$$F(x) = \int_0^{\arcsin x} \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du$$

$$= \int_0^{\arcsin x} |\cos u| (\cos u) du \quad \text{or } \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \int_0^{\arcsin x} \cos^2 u du = \frac{1}{2} \int_0^{\arcsin x} (1 + \cos 2u) du$$

$$= \frac{1}{2} \left[u + \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^{\arcsin x}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\arcsin x + \frac{\sin(2 \arcsin x)}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x \sqrt{1-x^2} \right)$$

NB :

pas dérivable en $[-1, 1]$ mais F est dérivable en $[-1, 1]$
de dérivée $f(-1)$ et $f(1)$

3. Changement de variable affine.

On rencontre souvent cette situation : $\int_a^b f(at+b) dt$

avec f comme il faut
 a, b réels $a \neq 0$

on pose $x = at + b$ et $dx = a dt$

$$\text{si } t = \alpha, x = a\alpha + b$$

$$t = \beta, x = a\beta + b$$

$$\text{et ainsi } \int_a^b f(at+b) dt = \frac{1}{a} \int_{a\alpha+b}^{a\beta+b} f(x) dx.$$

Remarque :

lorsque l'on calcule une intégrale de la forme $\int_a^b f(t) dt$

on peut toujours se ramener à une intégrale de la forme $\int_a^1 f(x\alpha + \beta) dx$ par un changement de variable affine.

Exercice =

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1) Si f est paire pour tout $a > 0$, on a $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.

2) Si f est impaire $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

3) Si f est T périodique ($T > 0$)

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt \quad (a, b \text{ réels})$$

$$1) \int_{-a}^a f(t) dt = \underbrace{\int_{-a}^0 f(t) dt}_{u=-t} + \int_0^a f(t) dt.$$

$$= - \int_a^0 f(-u) du = \int_0^a f(u) du \text{ car } f \text{ paire}$$

$$3) \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(t+T) dt$$

$x = t+T \quad \downarrow = \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx.$

V. Compléments variés.

1) Intégrale, dépendant d'un paramètre.

on considère $f = \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{array} \right)$

donc à x fixé la fonction = $f(x, \cdot) = \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x, t) \end{array} \right)$

est continue par morceaux sur $[a, b]$ on peut considérer :

$$\int_a^b f(x, t) dt.$$

On obtient alors une fonction :

$$\varphi = \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt \end{array} \right)$$

Question : Comment étudier φ ? (continuité, dérivabilité, ...)

- Première idée : Essayer de faire sortir le x de l'intérieur de l'intégrale.

(peu importe s'il arrive aux bornes).

Par exemple si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, on peut considérer :

$$\varphi = \left(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right. \\ \left. x \mapsto \int_0^1 f(x-t) dt \right)$$

Pour x fixé on écrit $\int_0^1 f(x-t) dt = - \int_{x-x}^{x-1} f(u) du$.

Si $F = \left(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right. \\ \left. x \mapsto \int_0^x f(t) dt \right)$ comme f est C^0 , la fonction F est C^1 avec $F' = f$.

et on a :

$$\varphi(x) = \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{x-1} f(t) dt = F(x) - F(x-1)$$

on sait étudier φ .

Première idée (bis)

Regarder si $f(x, \cdot)$ n'est pas une dérivée d'une fonction $F_x: t \mapsto F_x(t)$ (F dépend de x). On aura alors $\int_a^b f(x, t) dt = \left[F_x(t) \right]_{t=a}^{t=b}$

Deuxième idée :

Attendre l'année prochaine où on vous dira tout. Sinon on est obligé de tout faire à la main avec les déf de continuité, de dérivabilité.

Dans 99% on aura $\varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Remarque :

voir le devoir 14 et 2 et 13 pour des exemples.

2. Intégrales de périodes.

situation :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique, avec $f \in C^0$ sur $[0; T]$.

Alors : $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$ pour tout a réel.

On parle d'intégrale de période)

Supposons que f soit continue. On considère $G = \left(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right. \\ \left. x \mapsto \int_x^{x+T} f(t) dt \right)$

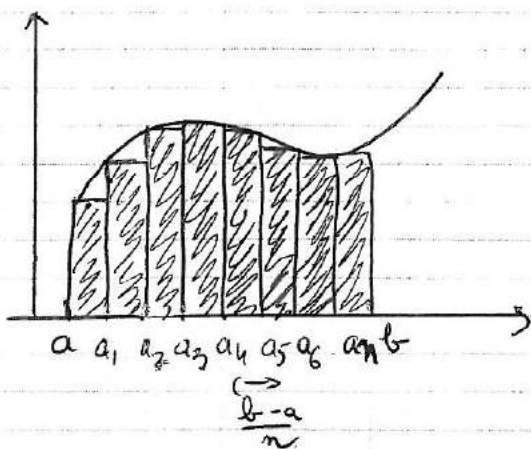
ou on considère $F = \left(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right. \\ \left. x \mapsto \int_0^x f(t) dt \right)$. F est C^1 avec $F' = f$.

et $G(x) = F(x+1) - F(x)$ donc G est C par composition et
 $G'(x) = F'(x+1) - F'(x)$
 $= f(x+1) - f(x) = 0$. donc G constante de valeur $G(0)$.

3) Somme de Riemann.

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ C⁰-PM.

Pour $n \geq 1$, on prend une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$
de $[a; b]$ à pas régulier i.e. $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$.
On a partagé $[a; b]$ en intervalles de longueurs égales.



La somme de Riemann relatif à cette subdivision est =

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) (a_{k+1} - a_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$

aire des rectangles
 rangés (si $f \geq 0$).

Pour tout $n \geq 1$, on fait la même chose avec une suite

$(R_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels.

Théorème 11 :

Avec les notations ci-dessus, $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^+(f) = \int_a^b f(t) dt$

Preuve =

- $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$
- $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$.

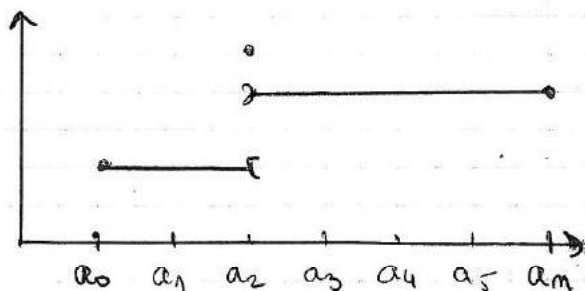
Etape 1:

On suppose que $f = M$ sur $[a; b]$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \frac{b-a}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} M}_{n \text{ termes}} = (b-a)M.$$

or $\int_a^b f(t) dt = (b-a)M$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(f) = \int_a^b f(t) dt$.

Etape 2: Ici, φ est un escalier sur $[a; b]$. φ a un nombre FINI de pts de discontinuité. Appelons $N \rightarrow$ on fixe $n \geq 1$



Si l'intervalle $[a_k, a_{k+1}[$ ne contient pas de pt de discontinuité de φ avec $\varphi|_{[a_k, a_{k+1}[}$ alors φ est constante sur $[a_k, a_{k+1}[$ $= \varphi(a_k)$

$$\begin{aligned} \text{Puis } \left| \int_a^b \varphi(t) dt - R_n(\varphi) \right| &= \left| \int_a^b \varphi(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(a_k) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(a_k) (a_{k+1} - a_k) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (\varphi(t) - \varphi(a_k)) dt \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (\varphi(t) - \varphi(a_k)) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} (\varphi(t) - \varphi(a_k)) dt \right| \end{aligned}$$

Mais pour $t \in (a; b)$:

$$|\varphi(t) - \varphi(a_k)| \leq |\varphi(t)| + |\varphi(a_k)| \leq 2 \|\varphi\|_{\infty}.$$

$$\text{donc } \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\varphi(t) - \varphi(a_k)| dt \leq 2(a_{k+1} - a_k) \|\varphi\|_{\infty}.$$

$$\text{ie } \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\varphi(t) - \varphi(a_k)| dt \leq \frac{2(b-a)}{n} \|\varphi\|_{\infty}.$$

Enfin, si $[a_k, a_{k+1}[$ ne contient pas de pt de discontinuité de φ .

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} |\varphi(t) - \varphi(a_k)| dt = 0$$

(constant sur $[a_k, a_{k+1}[$ donc $\varphi(a_k) = \varphi(t)$)

Comme il y a au plus N intervalles de la forme $[a_k, a_{k+1}[$ qui contiennent un point de discontinuité de φ on a $= \left| \int_a^b \varphi(t) dt - R_n(\varphi) \right|$
 $\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\varphi(t) - \varphi(a_k)| dt \right| \leq \frac{2N(b-a)}{n} \|\varphi\|_\infty$.

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par sandwich :

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt - R_n(\varphi) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Etape 3 : (cas général)

On sait que f se laisse approcher uniformément par des fonctions en escalier.

Si $\varepsilon > 0$, il existe φ escalier tq : $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on fait une découpe en trois.

$$\left| \int_a^b f(t) dt - R_n(f) \right| \leq \left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b \varphi(t) dt \right| + \left| \int_a^b \varphi(t) dt - R_n(\varphi) \right| + \left| R_n(\varphi) - R_n(f) \right|.$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b \varphi(t) dt \right| &\leq \int_a^b |f(t) - \varphi(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \|f - \varphi\|_\infty dt \\ &= (b-a) \|f - \varphi\|_\infty \\ &\leq (b-a) \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow |R_n(\varphi) - R_n(f)| &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)}{n} (\varphi(a_k) - f(a_k)) \right| \\ &\leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} |\varphi(a_k) - f(a_k)| \\ &\leq \|f - \varphi\|_\infty \\ &\leq (b-a) \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \left| \int_a^b f(t) dt - R_n(f) \right| \leq 2\varepsilon(b-a) + \left| \int_a^b \varphi(t) dt - R_n(\varphi) \right|$$

Valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais selon $\boxed{\mathbb{R}^2}$, $R_n(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(t) dt$.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$, tq si $n \geq N$ on ait :

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt - R_m(\varphi) \right| \leq \varepsilon.$$

Il reste donc =

$$\left| \int_a^b f(t) dt - R_m(f) \right| \leq 2\varepsilon(b-a) + \varepsilon \quad \text{dès que } m \geq N$$

$$\text{donc } \exists \lim_{m \rightarrow +\infty} R_m(f) = \int_a^b f(t) dt \quad \blacksquare$$

Remarque =

$$\text{On a donc pour } f \in C^0\text{-PM}([a; b], \mathbb{R})$$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \xrightarrow{+\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Ce théorème permet donc, deux choses =

→ de calculer des limites de suites.

→ de donner des valeurs approchées de l'intégrale.

Dans la pratique, on utilisera plutôt $a=0$, $b=1$

$$\text{alors } R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et ainsi =}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{+\infty} \int_0^1 f.$$

Exemple =

$$1) \text{ Trouver } \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)}_{u_n}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow{+\infty} \int_0^1 f(x) dx = \ln 2.$$

$$\text{car } f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

$$\underline{\text{NB}} = \text{Si } R_n^+ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a_{k+1}) \text{ alors } R_n^+ \xrightarrow{+\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

$$\text{et } R_n^+ = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(a_k).$$

2) Trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ où $u_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$

$$v_n = \ln u_n = \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{n} (\ln(n+1) + \dots + \ln(n+n))$$

$$= \ln \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k)$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx$$

$$u = 1+x \quad \int_1^2 \ln(u) du$$

$$= \left[u \ln u - u \right]_1^2 = 2 \ln 2 - 2 + 1 = \ln 4 - 1$$

$$\text{or } u_n = e^{v_n} \xrightarrow{+\infty} \exp(\ln 4 - 1) = \frac{4}{e}$$

par continuité de l'exp.

$$(\Leftrightarrow) (\forall x_n \rightarrow x_0) (f(x_n) \rightarrow f(x_0))$$

Voir Poly : $\rightarrow$ vitesse de convergence pour f lipschitzienne

$\rightarrow$ méthode des trapèzes.

4. Intégration des fractions rationnelles.

Fraction rationnelle : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P, Q polynômes.

$$\text{- Ex 1} = \int_a^b \frac{1}{x+a} dx = \left[\ln|x+a| \right]_a^b$$

$$\text{- Ex 2} = \int_a^b \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx$$

$$\text{on cherche } \lambda, \mu \text{ réels tq : } \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{\lambda}{x-a} + \frac{\mu}{x-b}$$

et on se ramène à 1.

$$\text{- Ex 3} = \int_a^b \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx = \left[\ln|ax^2+bx+c| \right]_a^b$$

$$\text{- Ex 4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2}$$

$\Delta < 0$ on ne peut pas appliquer Ex 2.

Rappel $[\arctan u]' = \frac{u'}{1+u^2}$

Décomposition canonique du trinôme =

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\ = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\frac{3}{4} \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \right)^2 + 1 \right)} \\ = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \right)^2 + 1} = \frac{4}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \right) \right]_0^1$$

Nb: cette technique s'adapte au calcul de toute intégrale de la forme:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

- Ex 5 = $\int_{**}^{**} \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} dx$ avec $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

$$\int_{**}^{**} \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} dx = \underbrace{\frac{\alpha}{2a} \int \frac{2\alpha x + b}{ax^2+bx+c} dx}_{\text{donne un log}} + \underbrace{\frac{\beta - \frac{b\alpha}{2a}}{a} \int \frac{1}{x^2+bx+c} dx}_{\text{donne un arctan}}$$

Illustration:

Tracer les primitives de $x \mapsto \frac{x}{1-x+x^2}$ $\Delta < 0$.

Cette fonction est C^0 sur $\mathbb{R}$: elle admet des primitives dont une est:

$$F(x) = \int_0^x \frac{x}{1-x+x^2} dx = \int_0^x \frac{1}{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2-x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{donne un log}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{donne un arctan}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln(x^2-x+1) \right]_0^x + \frac{1}{2} \left[\right]$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \right) + \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]$$

Remarque =

Sur $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ on sait que $Q = \underbrace{p_1 \times p_2 \times \dots \times p_m}_{\text{de } d^0 1} \times \underbrace{q_1 \times \dots \times q_r}_{\text{de } d^2 \text{ avec } \Delta < 0}$.

Ainsi "on peut" écrire $\frac{1}{Q(x)} = \frac{\alpha_1}{p_1} + \dots + \frac{\alpha_m}{p_m} + \frac{\beta_1 x + \gamma_1}{q_1} + \dots + \frac{\beta_r x + \gamma_r}{q_r}$

donc $\int \frac{1}{Q}$ se ramène au calculs des exemples 1 à 5.

