Digest sur les familles sommables

Lycée Joffre, PC

30 août 2023

Notions de familles

Définition 1 *Soient X et I deux ensembles. Une famille d'éléments de X indexée par I est une application de I dans X. Pour chaque i dans I on note x_i l'image de i par cette application et la famille en question se note $(x_i)_{i\in I}$.*

Remarque 1
1. On retrouve la notion de suite réelles lorsque $I = \mathbb{N}$ et $X = \mathbb{R}$.
2. Lorsque $I = \{1, \dots, n\}$, l'ensemble des familles de réels indexées par I n'est autre que $\mathbb{R}^n$.
3. L'ensemble I est a priori quelconque (pas forcément une partie de $\mathbb{N}$). Par exemple, on peut très bien considérer des famille d'élément indexées par $\mathbb{R}$: $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$.
4. Lorsque l'ensemble des indices I est un ensemble de couples i.e. $I = J \times K$ où J et K sont deux ensembles, on parle de « familles doubles »

1 Familles sommables de réels positifs

Lorsque J est un ensemble fini et lorsque $(x_j)_{j\in J}$ est une famille de réels, la somme $\displaystyle\sum_{j\in J} x_j$ a un sens (pour un nombre fini d'éléments, changer l'ordre de sommation n'a pas de d'influence sur le résultat). Par contre, lorsque J est infini, ce n'est pas forcément le cas.

Définition 2 *Soient I un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On pose :*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} x_i \mid F \text{ partie finie de } I\right\}.$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$ est soit un réel positif, soit $+\infty$. Lorsque $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i < +\infty$, on dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable.

Remarque 2
Faire la différence avec la notation des séries dans laquelle on on tient compte de l'ordre.

Théorème 1
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs. L'ensemble des indices $i \in I$ tels que $x_i \neq 0$ est dénombrable (en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$).

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \left\{i \in I \mid x_i \geqslant \dfrac{1}{n}\right\}$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble I_n est infini. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme I_n est supposé infini, il contient une partie J_k de cardinal k. On a ainsi :

$$\sum_{i\in I} x_i \geqslant \sum_{i\in J_k} x_i = \frac{k}{n}.$$

Ceci étant valable pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ on fait tendre k vers $+\infty$ pour obtenir une contradiction.
Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est fini. Mais $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$ est alors un union dénombrable d'ensemble finis : I est dénombrable. □

Théorème 2
Soient J un ensemble strictement dénombrable, $(x_j)_{j \in J}$ une famille de réels positifs et $\sigma : \mathbb{N} \to J$ une bijection. On a alors (dans $\overline{\mathbb{R}}$) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{j \in J} x_j.$$

En particulier, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = x_{\sigma(n)}$, la série à termes positifs $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente si et seulement si la famille $(x_j)_{j \in J}$ est sommable.

Démonstration. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $J_n = \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$. On a alors, par définition de la notation $\sum_{j \in J} x_j$:

$$\sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)} = \sum_{j \in J_n} x_j \leqslant \sum_{j \in J} x_j.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient en faisant tendre n vers $+\infty$, l'inégalité suivante dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} \leqslant \sum_{j \in J} x_j.$$

• Démontrons l'inégalité réciproque. Soit F une partie finie de J. On a alors :

$$\sum_{j \in F} x_j = \sum_{n \in \sigma^{-1}(F)} x_{\sigma(n)} \leqslant \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}}_{\text{indépendant de } F} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ceci étant vrai pour tout partie finie F de J, par définition de la notation $\sum_{j \in J} x_j$, on a :

$$\sum_{j \in J} x_j \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}.$$

Le théorème est ainsi démontré. □

Théorème 3 (Associativité générale pour les familles sommables de réels positifs)
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs et $(A_\lambda)_{\lambda \in J}$ une partition stricte de I. On a alors l'égalité suivante dans $\overline{\mathbb{R}}^+$:

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{j \in A_\lambda} x_j \right).$$

Démonstration. • Soit F une partie finie de I. On peut écrire : $F = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap F)$ (union disjointe !).

Comme F est un ensemble fini et les A_λ disjoints, $A_\lambda \cap F \neq \emptyset$ pour un nombre fini d'indices λ. Il existe ainsi une partie finie Λ_F de Λ tel que :

$$F = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_F} (A_\lambda \cap F).$$

On a alors : $\displaystyle\sum_{i\in F} x_i = \sum_{\lambda\in\Lambda_F} \left(\sum_{i\in A_\lambda \cap F} x_i \right) \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda} \left(\sum_{i\in A_\lambda} x_i \right)$.

• Regardons l'inégalité réciproque. Si Λ_0 est une partie finie de Λ, on a :

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_0} \left(\sum_{i\in A_\lambda} x_i \right) = \sum_{A_j} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i.$$

Ceci étant vrai pour tout partie finie Λ_0 de Λ, on peut conclure que $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda} \left(\sum_{i\in A_\lambda} x_i \right) \leqslant \sum_{i\in I} x_i$. □

Théorème 4
Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles dans $\mathbb{R}^+$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\sum_{i\in I} (\alpha x_i + y_i) = \alpha \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i \in \overline{\mathbb{R}}.$$

En particulier, lorsque $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables, il en va de même de $(\alpha x_i + y_i)_{i\in I}$.

Démonstration. Soit J une partie finie de I on a :

$$\sum_{i\in J} (\alpha x_i + y_i) = \alpha \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in J} y_i \leqslant \alpha \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i.$$

Ceci étant vrai pour tout partie finie J, on a donc :

$$\sum_{i\in I} (\alpha x_i + y_i) \leqslant \alpha \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i.$$

Montrons alors l'inégalité réciproque. Pour toute partie finie J de I on a :

$$\alpha \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in J} y_i = \sum_{i\in J} (\alpha x_i + y_i) \leqslant \sum_{i\in I} (\alpha x_i + y_i).$$

Par passage au sup, comme tout est positif, on obtient l'inégalité réciproque. □

2 Familles sommables de réels

Notation. Pour a réel on note $a^+ = \max(0, a) = \dfrac{1}{2}(a + |a|)$ et $a^- = \max(0, -a) = \dfrac{1}{2}(-a + |a|)$.

Ainsi a^+ et a^- sont positifs tous les deux et $\begin{cases} a = a^+ - a^- \\ |a| = a^+ + a^- \end{cases}$

Définition 3 *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable lorsque les familles de réels positifs $(x_i^+)_{i\in I}$ et $(x_i^-)_{i\in I}$ sont sommables. Dans ce cas on pose :*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^-.$$

Théorème 5
Soit $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de réels. Cette famille est sommable si et seulement si la famille* $(|x_i|)_{i\in I}$ *est sommable et on a alors (inégalité triangulaire) :*

$$\left|\sum_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |x_i|\,.$$

Démonstration. Supposons que la famille $(x_i)_{i\in I}$ soit sommable. Alors les familles $(x_i^+)_{i\in I}$ et $(x_i^-)_{i\in I}$ sont sommables. Ainsi, d'après le théorème 4, comme $|x_i| = x_i^+ + x_i^-$, la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ est sommable.
Réciproquement, supposons que la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ soit sommable. Soit J une partie finie de I. Pour tout i dans J on a $0 \leqslant x_i^+ \leqslant |x_i|$ et $0 \leqslant x_i^- \leqslant |x_i|$. Ainsi :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i\in J} x_i^+ \leqslant \sum_{i\in J} |x_i| \leqslant \sum_{i\in I} |x_i| \\ \displaystyle\sum_{i\in J} x_i^- \leqslant \sum_{i\in J} |x_i| \leqslant \sum_{i\in I} |x_i| \end{cases}$$

Ceci étant vrai quelque soit le choix de J partie finie de I, il vient :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i\in I} x_i^+ \leqslant \sum_{i\in I} |x_i| < +\infty \\ \displaystyle\sum_{i\in I} x_i^- \leqslant \sum_{i\in I} |x_i| < +\infty \end{cases}$$

Il en résulte que les familles $(x_i^+)_{i\in I}$ et $(x_i^-)_{i\in I}$ sont sommables, donc la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable.
Il reste à démontrer l'inégalité triangulaire. Supposons que $(x_i)_{i\in I}$ soit une famille sommable. Soit J une partie finie de I. Pour tout $i \in J$ on a :

$$-|x_i| \leqslant x_i \leqslant |x_i|\,.$$

Ainsi, $-\sum_{i\in J} |x_i| \leqslant \sum_{i\in J} x_i \leqslant \sum_{i\in J} |x_i|$ ce qui implique sue :

$$-\sum_{i\in I} |x_i| \leqslant \sum_{i\in J} x_i \leqslant \sum_{i\in I} |x_i|\,.$$

Ceci étant vrai pour tout partie finie J de I, il vient :

$$-\sum_{i\in I} |x_i| \leqslant \sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} |x_i|\,.$$

L'inégalité triangulaire est donc prouvée. $\square$

Théorème 6 (Domination)
Soient $(x_i)_i \in I$ *une famille de réels et* $(y_i)_{i\in I}$ *une famille sommable de réels positifs. Si pour tout* $i \in I$ *on a* $|x_i| \leqslant y_i$ *alors la famille* $(x_i)_{i\in I}$ *est sommable et* $\left|\sum_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.

Démonstration. Soit J une partie finie de I. On a alors :

$$\sum_{i\in J} |x_i| \leqslant \sum_{i\in J} y_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i.$$

Ceci étant vrai pour toute partie finie J de I, il vient : $\sum_{i\in I} |x_i| \leqslant \sum_{i\in I} y_i < +\infty$. Ainsi la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ est sommable et le théorème 5 permet de conclure. $\square$

Théorème 7
Soient $(x_i)_{i\in I}$ *et* $(y_i)_{i\in I}$ *deux familles sommables de réels et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Alors la famille* $(\alpha x_i + y_i)_{i\in I}$ *est sommable et on a :*

$$\sum_{i\in I}(\alpha x_i + y_i) = \alpha \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i.$$

Démonstration. • Pour tout $i \in I$ on a : $|\alpha x_i + y_i| \leqslant |\alpha|\,|x_i| + |y_i|$. Ainsi, comme les familles $(|\alpha x_i|)_{i\in I}$ et $(|y_i|)_{i\in I}$ son sommables, par domination (théorème 6) la famille $(\alpha x_i + y_i)_{i\in I}$ est sommable.

• le reste est en exercice. □

Théorème 8
Soit $(x_i)_{i\in I}$ *une famille sommable. L'ensemble* J *des indices* i *dans* I *tels que* $x_i \neq 0$ *est dénombrable.*

Démonstration. Comme $(x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable il en va de même des familles de réels positifs $(x_i^+)_{i\in I}$ et $(x_i^-)_{i\in I}$. Ainsi, d'après le théorème 1 l'ensemble J_1 [resp. J_2] des indices i dans I tels que $x_i^+ \neq 0$ [resp. $x_i^- \neq 0$] est dénombrable. Comme $J \subset J_1 \cup J_2$ qui est dénombrable, J est dénombrable. □

Théorème 9
Soient J *un ensemble strictement dénombrable,* $(x_j)_{j\in J}$ *une famille de réels et* $\sigma : \mathbb{N} \to J$ *une bijection. Posons pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $u_n = x_{\sigma(n)}$. *Alors la famille* $(x_i)_{i\in J}$ *est sommable si et seulement si la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_{\sigma(n)}$ *est absolument convergente. Dans ce cas :*

$$\sum_{i\in J} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration.
• Supposons que la famille $(x_i)_{i\in J}$ soit sommable. Ainsi les famille de réels positifs $(x_i^+)_{i\in J}$ et $(x_i^-)_{i\in J}$ sont sommables. D'après le théorème 2 les séries à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^+$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^-$ convergent de sommes respectives :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - = \sum_{i\in J} x_i^+ \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = \sum_{i\in J} x_i^-.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, on est assurée de la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

Enfin, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = u_n^+ - u_n^-$, il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = \sum_{i\in J} x_i^+ - \sum_{i\in J} x_i^- = \sum_{i\in J} u_i.$$

• La réciproque se traite de la même manière. □

Théorème 10 (Théorème de convergence commutative)
Soit (u_n) *une suite réelle telle que la série* $\sum u_n$ *converge absolument. Alors, pour tout permutation* σ *de* $\mathbb{N}$ *la série* $\sum u_{\sigma(n)}$ *est absolument convergente et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}.$$

Démonstration. Pour toute partie finie F de $\mathbb{N}$ on a : $\sum_{n \in F} |u_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. Ainsi $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ et la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable. On applique alors le théorème précédent. □

Théorème 11 (Associativité générale)
Soient $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels et $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une partition stricte de I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) La famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable.

(2) Pour tout $\lambda \in \Lambda$ la famille $(x_i)_{i \in A_\lambda}$ est sommable et la famille $\left(\sum_{i \in A_\lambda} |x_i| \right)_{\lambda \in \Lambda}$ est sommable.

Dans ce cas, on a : $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in A_j} x_i \right)$.

Démonstration. D'après l'associativité générale pour les famille de réels positifs :

$$\sum_{i \in I} |x_i| = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in A_\lambda} |x_i| \right).$$

Cela prouve l'équivalence des deux propriétés.
On suppose maintenant que l'un des deux membres de l'égalité ci-dessus est fini.
Il vient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} x_i &= \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^- = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in A_\lambda} x_i^+ \right) - \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in A_\lambda} x_i^- \right) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in A_\lambda} (x_i^+ - x_i^-) \right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in A_\lambda} x_i \right) \end{aligned}$$

Le théorème est démontrée. □

Une illustration du théorème d'associativité générale.

On considère une famille sommable $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$. On se pose la question suivante : que dire de $\sum_{(n,m) \in I} u_{n,m}$ où $I = \left\{ (n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid m \geqslant n \right\}$?
Considérons pour $n \in \mathbb{N}$ fixé l'ensemble $A_n = \left\{ (n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid k \geqslant n \right\}$ et pour $m \in \mathbb{N}$ fixé l'ensemble $B_m = \{(\ell, m) \mid \ell \leqslant m\}$. On a :

$$I = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} B_n.$$

Il est fortement conseillé de faire un dessin dans le plan en représentant les éléments de I, A_n et B_m avec n et m fixés...
Le théorème d'associativité générale assure alors que :

$$\sum_{(n,m) u_{n,m} \in I} u_{n,m} = \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in A_n} u_{m,n} \right)}_{= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} u_{n,m}} = \underbrace{\sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in B_m} u_{m,n} \right)}_{= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{m} u_{n,m}}.$$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=n}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{m} u_{n,m}$.

Théorème 12 (Associativité générale pour les « familles doubles »)
Soient $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille double de réels et $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une partition stricte de $I\times J$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *La famille $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable.*

(2) *Pour tout $\lambda\in\Lambda$ la famille $(x_{i,j})_{(i,j)\in A_\lambda}$ est sommable et la famille $\displaystyle\left(\sum_{(i,j)\in A_\lambda}|x_{i,j}|\right)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable.*

Dans ce cas, on a : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{(i,j)\in A_\lambda} x_{i,j}\right)$.

Démonstration. C'est un re-écriture du théorème 11 : ici $I\times J$ joue le rôle de I dans le théorème 11. □

Théorème 13 (Théorème de Fubini)

1. *Soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille double de réels. Si l'une des sommes*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}|x_{i,j}|\,,\ \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}|x_{i,j}|\right)\,,\ \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}|x_{i,j}|\right)$$

est fini, les deux autres le sont aussi et alors :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} x_{i,j}\right).$$

2. *Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(x_j)_{j\in J}$ deux familles sommables de réels. Alors la famille $(x_iy_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et :*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_iy_j = \left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_j\right).$$

Démonstration.

1. C'est un cas particulier du théorème 12 puisque :

$$I\times J = \bigsqcup_{i\in I}\{i\}\times J = \bigsqcup_{j\in J} I\times\{j\}\,.$$

2. C'est le point précédente avec $x_{i,j} = x_ix_j\ldots$

□