Interversion des limites
Une correction

Table des matières

1 Rappels sur l'intégration

Je rappelle deux théorèmes concernant l'intégration et les intégrales impropres.

Théorème 1
Soient f et g dans $C^0([a,+\infty[,\mathbb{C})$.

(1) *Si $|f| \leqslant |g|$ alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f et la non intégrabilité de f implique la non intégrabilité de g.*

(2) *Si $f(x) \underset{+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$ alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f.*

(3) *Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ alors les fonction f et g sont simultanément intégrables sur $[a,+\infty[$, autrement dit les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t$ ont même nature.*

<u>**Conséquence fondamentale**</u>. Pour montrer l'intégrabilité d'une fonction C^0 $f : [a,+\infty[\to\mathbb{C}$, on cherche $\alpha > 1$ tel que :

$$t^\alpha f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans ce cas $f(t) \underset{+\infty}{=} O\big(\frac{1}{t^\alpha}\big)$ et comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann : $\alpha > 1$), on peut conclure, par domination, que f est intégrable.

Théorème 2
Soient $\overline{a} < \overline{b}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, $f :]\overline{a},\overline{b}[\to \mathbb{R}$ continue , $\varphi :]\overline{\alpha},\overline{\beta}[\to]\overline{a},\overline{b}[$ une bijection croissante de classe C^1.
Les intégrales impropres $\displaystyle\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{\overline{\alpha}}^{\overline{\beta}} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et de même valeur si convergence.

Exercice 1
Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable. Démontrer que $g : t \mapsto \dfrac{\sqrt{f(t)}}{t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exercice 2 (Intégrales de Bertrand)
Pour α et β dans $\mathbb{R}$ on considère l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que si $\alpha > 1$ l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta}$ est convergente.
2. Démontrer que si $\alpha < 1$ l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta}$ est divergente.
3. On suppose ici que $\alpha = 1$. En effectuant le changement de variable $t = \mathrm{e}^u$, étudier la convergence de l'intégrale impropre $I_{1,\beta}$.

Exercice 3
On considère l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que cette intégrale impropre est convergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$.
3. Qu'en déduire pour la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$?

2 Interversion des limites pour les suites de fonctions

2.1 Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions sur un segment

Théorème 3

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ (où $a < b$) qui converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4

1. Savez-vous démontrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue ?
2. Démontrer le théorème 3.

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions continues sur I qui converge uniformément vers f sur I.
   Soit $x_0 \in I$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N entier naturel tel que, pour tout $n \geqslant N$, on ait :
   $$(\forall x \in I)(|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$
   Puis chaque f_n est continue, il existe donc α_n tel que pour tout x dans I vérifiant $|x - x_0| \leqslant \alpha_n$ on ait :
   $$|f_n(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$
   Pour x dans I tel que $\underline{|x - x_0| \leqslant \alpha_N}$ on a donc (<u>**découpe en trois**</u>) :
   $$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0| &\leqslant \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{\leqslant\varepsilon} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(x_0)|}_{\leqslant\varepsilon} + \underbrace{|f_N(x_0) - f_N(x)|}_{\leqslant\varepsilon} \\ &\leqslant 3\varepsilon\end{aligned}$$
   La fonction f est donc continue en x_0...

   Commentaire. Il suffit d'avoir une convergence uniforme sur les compacts de I (CUC). Cela n'est pas surprenant puisque la continuité est une notion locale.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
   $$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_a^b \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{\leqslant\|f_n-f\|_\infty}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty\end{aligned}$$
   Comme (f_n) converge uniformément vers f, on a $\|f_n - f\|_\infty \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par sandwich, on obtient :
   $$\exists \lim_{n\to+\infty} \left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = 0.$$

Exercice 5

1. Trouver une suite (f_n) de fonctions continues qui converge simplement (mais non uniformément) vers une fonction f intégrable sur $[0,1]$ avec
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Trouver une suite (f_n) de fonctions continues qui converge simplement (mais non uniformément) vers une fonction f intégrable sur $[0,1]$ avec :
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. On prend par exemple $f_n(x) = x^n$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. La suite suite de fonction (f_n) converge simplement vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$
   La convergence n'est pas uniforme puisque chaque f_n est continue et f ne l'est pas. Le reste est pour le lecteur.

2. On peut prendre le contre-exemple graphique suivant :

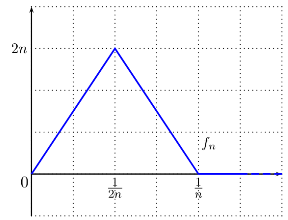

Figure 1 – Contre exemple exercice 2

On a bien convergence simple de la suite (f_n) vers la fonction nulle sur $[0,1]$ puisque pour tout $x \in [0,1]$ il existe N_x entier tel que pour tout $n \geqslant N_x$ on ait $f_n(x) = 0$. La convergence n'est pas uniforme car $\|f_n\|_\infty = 2n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Enfin on a :

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 6
Donner un contre exemple graphique permettant d'infirmer la conclusion du théorème 3 dans le cas où on remplace le segment $[a,b]$ par un intervalle I non borné.

On peut prendre le contre-exemple graphique suivant :

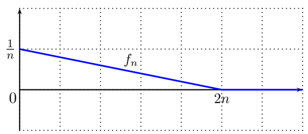

Figure 2 – Contre exemple exercice 6

Exercice 7
Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonction définie sur $I = [0,+\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$.

1. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
2. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$?

1. Chaque f_n est lisse sur $[0,+\infty[$ avec :

$$f_n'(x) = \frac{1}{n!}\left(nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} - x^n\mathrm{e}^{-x}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(n-1)!}(n-x).$$

Ainsi chaque f_n croit strictement sur $[0,n]$ et décroît strictement sur $[n,+\infty[$: $f_n)$ atteint son maximum en $x=n$ et ainsi

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\geqslant 0}|f_n(x)| = \frac{n^n\mathrm{e}^{-n}}{n!}.$$

Mais la formule de Stirling assure que $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2n\pi}$ donc on a :

$$\|f_n\|_\infty \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}.$$

Il en résulte que $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ et ainsi la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle.

2. Chaque f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ (cf la fonction Γ) et

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\Gamma(n+1) = 1.$$

Exercice 8
Démontrer que si l'on remplace $[a,b]$ par un intervalle borné I dans l'énoncé du théorème 3 alors, en supposant chaque f_n intégrable sur I, la conclusion est encore valable.

- Il faut d'abord assurer de l'intégrabilité de f sur I. Comme $f_n \xrightarrow[I]{CU} f$, il existe p entier tel que, pour tout $x \in I$ on ait :

$$|f_p(x) - f(x)| \leqslant 1.$$

On a donc : $|f| \leqslant |f| + 1$, ce qui assure que f est intégrable sur I par domination.

- Pour $n \in \mathbb{N}$ on a encore :

$$\begin{aligned}\left|\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_I \underbrace{|f_n(t)-f(t)|}_{\leqslant \|f_n-f\|_\infty}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \operatorname{long}(I)\,\|f_n-f\|_\infty \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

NB : $\|f_n - f\|_\infty$ est a priori dans $\overline{\mathbb{R}}$. Pour n suffisamment grand c'est un réel.

2.2 Théorèmes de dérivabilité pour les suites de fonctions

Théorème 4 (Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite d'applications de classe C^1 à valeurs dans un espace de Banach, qui converge simplement vers une fonction f sur I et telle que la suite (f'_n) converge uniformément vers une fonction g. Alors :

- *La suite (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f.*
- *La fonction f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.*

Exercice 9
Démontrer le théorème 4.

2.3 Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions

Théorème 5 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue.)
Soit (f_n) une suite de fonctions, à valeurs complexes, continue par morceaux sur un intervalle I. On suppose :

(H1) La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.

(H2) Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout n entier on ait $|f_n| \leqslant \varphi$.

Alors la fonction f est intégrable sur I (ainsi que chaque fonction f_n) et on a :

$$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10 (Illustrations élémentaires)

1. *Sur un segment.* La suite de fonction $(\sin^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,\pi]$? Démontrer que : $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^\pi \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
2. Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin\frac{x}{n}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.
3. Démontrer que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Chaque f_n est continue sur $I = [0,\pi]$. La suite de fonction f_n converge simplement vers la fonction f définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = 0$ si $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ (ce qui montre qu'il n'y a pas convergence uniforme sinon f serait continue).
   Pour tout n entier naturel on a $|f_n| \leqslant 1$, et la fonction constante de valeur 1 est bien intégrable sur I. Le théorème de convergence dominée s'applique :
   $$\exists \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
2. Pour n entier on considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sin\frac{x}{n}}}{1+x^2}$. Chaque f_n est continue et la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0,+\infty[$.
   De plus pour tout n entier et tout $x \geqslant 0$ on a $|f_n(x)| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{1+x^2} = \varphi(x)$. La fonction φ est bien intégrable sur $[0,+\infty[$: le théorème de convergence dominée s'applique. On peut donc dire :
   $$\exists \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin\frac{x}{n}}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \{\operatorname{Arctan}(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$
3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geqslant 0$: $h_n(x) = \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t)$.
   — Chaque h_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

— Si $t > 0$, il existe un entier N_t tel que $t^2 \leqslant N_t$ et alors pour tout $n \geqslant N_t$ on a :

$$\ln h_n(t) = n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (-t^2).$$

Par continuité de exp, on a $h_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t^2}$.
Il en résulte que la suite de fonction h_n converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$, qui est continue sur $]0,+\infty[$.

— Pour tout $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, par l'inégalité de convexité $\ln(1+u) \leqslant u$ pour $u > -1$, on a $\ln h_n(t) \leqslant -t^2$, et ainsi

$$|h_n(t)| = h_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t),$$

où la fonction φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t.$$

2.4 Théorème de convergence dominée à paramètre continu

Théorème 6 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu.)
Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : X \times I \to \mathbb{C}$ et $\overline{a}$ une borne de X dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose :

(H1) Pour $t \in I$ fixé, $\lim\limits_{x\to\overline{a}} f(x,t) = \ell(t) \in \mathbb{C}$.

(H2) Pour x fixé dans I, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont C^0PM sur I.

(H3) Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$(\forall x \in X)(\forall t \in I)\left(|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)\right).$$

La fonction ℓ est intégrable sur I et on a :

$$\lim_{x\to a} \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 11
En admettant le théorème 5, démontrer le théorème 6.

3 Interversion des limites pour les séries de fonctions

3.1 Le théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$. En appliquant le théorème 3 à la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_n$ on obtient de suite le résultat suivant.

Théorème 7
Si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 12 (Avec des séries entières)
Soient $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$ entier et tout $r \in]0,R[$ on a :

$$2\pi a_n r^n = \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

2. En déduire qu'une fonction entière (i.e. une fonction série entière de rayon de convergence infini) qui est bornée est constante (théorème de Liouville).
3. En déduire (en admettant que l'inverse d'une série entière est développable en série entière de rayon de convergence infini) le théorème de D'alembert-Gauß.

1. Soit $n \geqslant 0$ et $r \in]0,R[$. On a :

$$\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p \mathrm{e}^{ip\theta}\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Mais une série entier converge normalement sur tout compact de son disque de convergence. Ainsi la série de fonctions

$\sum_{p\geqslant 0} a_p r^p \mathrm{e}^{ip\theta}$ converge normalement <u>en θ</u> sur $[0,2\pi]$, puisque pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $\left|a_p r^p \mathrm{e}^{ip\theta}\right| \leqslant |a_p|\, r^p$. On peut intervertir :

$$\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(p-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta}_{2\pi\delta_n^p}.$$

On obtient donc : $2\pi a_n r^n = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

2. Si f est bornée par un réel M on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$:

$$2\pi\,|a_n|\,r^n = \left|\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta \leqslant 2\pi M$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$, on a : $|a_n| \leqslant \dfrac{M}{r^n}$. Si $n \geqslant 1$, en faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient $a_n = 0$. Il reste donc $f = a_0$: f est constante.

3. **Une conséquence : <u>le théorème de d'Alembert-Gauß</u>.** *Tout polynôme non constant dans $\mathbb{C}[X]$ admet une racine.*

Utilisons le théorème de Liouville pour démontrer cela. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant. On suppose que P n'a pas de racine complexe. Ainsi pour tout z dans $\mathbb{C}$, on a $|P(z)| > 0$. On considère la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{P(z)}$. Cette fonction est une fonction entière qui est bornée : elle est donc constante, ce qui est absurde.

Exercice 13 (Une utilisation du produit de Cauchy)
Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $r \in]0,R[$ et $Z \in \mathbb{C}$ tel que $|Z| < r$, on pose :

$$I(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{i\theta} f(r\mathrm{e}^{i\theta})}{r\mathrm{e}^{i\theta} - Z}\,\mathrm{d}\theta.$$

Démontrer que $f(Z) = I(r)$.

Soient $r \in]0,R[$ et $Z \in \mathbb{C}$ tel que $|Z| < r$. On a :

$$\begin{aligned} I(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{i\theta} f(r\mathrm{e}^{i\theta})}{r\mathrm{e}^{i\theta} - Z}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\frac{Z}{r}\mathrm{e}^{-i\theta}} f(r\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{Z}{r}\right)^p \mathrm{e}^{-ip\theta}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{in\theta}\right)\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Les deux séries en jeu sont absolument convergentes : on peut effectuer leur produit de Cauchy. Ainsi :

$$\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{Z}{r}\right)^p \mathrm{e}^{-ip\theta}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{in\theta}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{Z}{r}\right)^k \mathrm{e}^{-ik\theta} a_{n-k} r^{n-k} \mathrm{e}^{i(n-k)\theta}\right) =$$

où $u_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{Z}{r}\right)^k a_{n-k} r^{n-k} \mathrm{e}^{i(n-2k)\theta}$. Mais pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in [0,2\pi]$, on a :

$$|u_n(\theta)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|Z|^k}{r^k} r^{n-k}\,|a_{n-k}| = c_n.$$

Or c_n est le terme général d'une série convergente, qui est le produit de Cauchy des séries absolument convergente $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{|Z|^p}{r^p}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n r^n$.

Ainsi la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement en θ sur $[0,2\pi]$. On peut intervertir $\displaystyle\int$ et $\displaystyle\sum$:

$$I(r) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{Z}{r}\right)^k a_{n-k} r^{n-k} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-2k)\theta}\,\mathrm{d}\theta}_{=2\pi\delta_n^{2k}}\right)}_{=x_n}$$

On a alors $x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \left(\frac{Z}{r}\right)^{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$. Il reste ainsi :

$$I(r) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{Z}{r}\right)^n a_n r^n = f(Z).$$

Exercice 14 (Intégrale de Poisson)
Pour $r \in \mathbb{R}$ on considère l'intégrale impropre :

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 + r^2 - 2r\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

a. Pour r dans $]-1,1[$ démontrer que :

$$\ln(1 + r^2 - 2r\cos\theta) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos n\theta}{n}.$$

En déduire la valeur de $I(r)$ sur cet intervalle.

b. Pour $|r| > 1$, calculer $I(r)$.

a. • Soit $r \in]-1,1[$. La fonction $f : \theta \mapsto \ln(1 + r^2 - 2r\cos\theta)$ est correctement définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞. En effet, noter que pour tout θ réel on a : $1 + r^2 - 2r\cos\theta = \left|1 - r\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2 > 0$.
De plus pour tout θ réel on a :

$$f'(\theta) = \frac{2r\sin\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}.$$

Puis, pour tout θ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} r^n \mathrm{e}^{in\theta}$ est convergente (série géométrique : $\left|r^n \mathrm{e}^{in\theta}\right| < 1$) de somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{in\theta} = \frac{r\mathrm{e}^{i\theta}}{1 - r\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{r\mathrm{e}^{i\theta}(1 - r\mathrm{e}^{-i\theta})}{|1 - r\mathrm{e}^{i\theta}|^2} = \frac{r\mathrm{e}^{i\theta} - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

On pose pour θ réel et n entier : $u_n(\theta) = r^n \mathrm{e}^{in\theta}$. Comme $\|u_n\|_\infty = r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et ainsi on peut intégrer terme à terme :

$$\int_0^{\theta} \frac{r\mathrm{e}^{i\theta} - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n(\mathrm{e}^{in\theta} - 1)}{in},$$

valable pour tout θ réel.

En passant à la partie imaginaire il vient :

$$\int_0^{\theta} \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}\mathrm{d}\theta = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos n\theta}{n} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n}}_{-\ln(1-r)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos n\theta}{n} - \ln(1-r)$$

Mais $\displaystyle\int_0^{\theta} \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\ln(1 - 2r\cos\theta + r^2) - \frac{1}{2}\underbrace{\ln(1 - 2r + r^2)}_{=2\ln(1-r)}$.

Ainsi : $\displaystyle\ln(1 - 2r\cos\theta + r^2) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos n\theta}{n}$.

• Soit $r \in]-1,1[$.
On pose $v_n(\theta) = \dfrac{r^n \cos n\theta}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}*$ et θ réel. Comme pour tout θ réel on a :

$$|v_n(\theta)| \leqslant r^n,$$

la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,\pi]$. On peut donc intégrer terme à terme :

$$\int_0^{\pi} \ln(1 + r^2 - 2r\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{r^n \cos n\theta}{n}\,\mathrm{d}\theta}_{=0} = 0$$

b. Soit r réel tel que $|r| > 1$. On pose $\rho = \dfrac{1}{r}$ de sorte que :

$$\ln(1+r^2-2r\cos\theta) = \ln\left(1 + \frac{1}{\rho}^2 - \frac{2\cos\theta}{\rho}\right) = \ln\left(\frac{\rho^2 + 1 - 2\rho\cos\theta}{\rho^2}\right) =$$

et ainsi $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1+r^2-2r\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \underbrace{\int_0^{\pi} \ln(\rho^2 + 1 - 2\rho\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta}_{=0} - \int_0^{\pi} \ln r^2 \mathrm{d}\theta =$

$\pi \ln r^2 = 2\pi \ln|r|$.

3.2 Théorème de dérivation pour les séries de fonctions

Théorème 8
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient (f_n) une suite de fonctions ***de classe*** *C^1 de I dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On suppose que :*

*(1) La série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement** vers S sur I.*
*(2) La série de fonctions $\sum f_n'$ **converge uniformément** sur tout segment $[a,b] \subset I$.*

Alors la fonction somme S est de classe C^1 sur I avec $S' = \sum_{n=0}^{=\infty} f_n'$.

Remarque 3.1
La conclusion est bien sûr valable lorsque l'hypothèse (2) est remplacée par : « *la série de fonctions $\sum f_n'$ **converge uniformément** sur I vers une fonction h* ».

Exercice 15
Démontrer le théorème 8.

Théorème 9
*Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et k un entier naturel non nul. Soient (f_n) une suite de fonctions **de classe** C^k de I dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On suppose que :*
*(1) Pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ la série de fonctions $\sum f_n^{(i)}$ **converge simplement** vers une fonction φ_i sur I.*
*(2) La série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ **converge uniformément** sur tout segment $[a,b] \subset I$.*

Alors la fonction $f = \varphi_0$ est de classe C^k sur I avec, pour tout $i \in \{0, \ldots, k\}$: $f^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$.

3.3 Théorème de la double limite pour les séries de fonctions

Théorème 10 (Théorème de la double limite)
Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle X de $\mathbb{R}$ et a un point adhérent à X. On suppose que :

(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a.
(H2) La série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur X.

Alors la série $\sum \ell_n$ converge et on a :

$$S(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Exercice 16
Démontrer le théorème 10

Remarque 3.2
Ce théorème peut s'utiliser pour :

- Assurer la convergence d'une série ;
- Déterminer la limite en un point adhérent à X de la fonction somme ;
- Pour démontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur un un certain intervalle.

Par exemple, la série de fonction $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n x^n}{n+1}$ converge simplement sur $]-1, 0]$,normalement donc uniformément sur chaque intervalle de la forme $[a, 0]$ avec $a \in]-1, 0[$ (puisque $\|f_n\|_{\infty,[a,0]} \leqslant |a|^n$), mais ne converge pas uniformément sur $]-1, 0]$, grâce au théorème de la double limite, puisque la série harmonique diverge.

Exercice 17 (La fonction ζ de Riemann)
On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

On note D_ζ son ensemble de définition.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose aussi $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

1. Déterminer D_ζ.
2. La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?
3. Montrer que ζ est continue sur D_ζ.
4. Montrer que ζ est de classe C^1 sur D_ζ et déterminer la fonction ζ' à l'aide d'une somme d'une série.
5. Déterminer, si elle existe, la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
6. Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

a) Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

b) En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$, on a :

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

c) Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

7. Donner l'allure du graphe de la fonction ζ.

1. Par Riemann, on a immédiatement $D_\zeta =]1, +\infty[$.

2. Supposons que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $]1, +\infty[$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ell_n = \dfrac{1}{n}$. Le théorème de la double limite assure alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ell_n$ converge, ce qui est profondément stupide.

   Conclusion. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $]1, +\infty[$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction u_n est continue sur $]1, +\infty[$ et on a, dès que $x \geqslant a > 1$:

$$|u_n(x)| \leqslant \underbrace{\frac{1}{n^a}}_{\text{indépendant de } x}.$$

   Il en résulte que : $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{n^a}$. Comme $\zeta(a)$ est bien défini, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$ et ainsi la fonction ζ est continue sur $[a, +\infty[$.

   Conclusion. Ceci étant valable pour tout $a > 1$, la fonction ζ est continue sur $D_\zeta =]1, +\infty[$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction u_n est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et on a : $u_n'(x) = (\ln n)u_n(x)$.
   Enfin, pour $a > 1$ et $x \geqslant a$ on a :

$$|u_n'(x)| \leqslant \underbrace{(\ln n)\frac{1}{n^a}}_{\text{indépendant de } x}.$$

   Il en résulte que : $\|u_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \dfrac{\ln n}{n^a}$.
   Mais pour $\gamma \in]1, a[$, on a $n^\gamma \dfrac{\ln n}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n^a}$ est convergente, donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$.
   Il en résulte que la fonction ζ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ avec dérivation terme à terme.

   Conclusion. Ceci étant valable pour tout $a > 1$, la fonction ζ est de classe C^1 sur $D_\zeta =]1, +\infty[$ et on a :

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   Comme la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$, le théorème de la double limite s'applique :

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n = 1.$$

6. a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x} = \mathrm{e}^{-x\ln t}$ est décroissante sur $[n-1, n+1]$ donc, pour tout $t \in [n-1, n]$ et $s \in [n, n+1]$ on a :

$$\frac{1}{s^x} \underbrace{\leqslant}_{(1)} \frac{1}{n^x} \underbrace{\leqslant}_{(2)} \frac{1}{t^x}.$$

On intègre l'inégalité (1) entre n et $n+1$ (les bornes sont dans le bon sens) pour obtenir $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}s}{s^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$ et on intègre l'inégalité (2) pour obtenir $\displaystyle\frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

Conclusion. $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

b) Soit $x \in D_\zeta$. D'après la question précédente, puisque les objets (intégrales impropres et série) qui interviennent convergent, on a :

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}}_{=\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}} \leqslant \zeta(x) - 1 \leqslant \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}}_{=\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}}.$$

Il vient ainsi de suite : $1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

c) On a $\dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{(x-1)} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$ et ainsi $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

7. Pour le lecteur.

8. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^∞ sur D_ζ.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $a > 0$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction la fonction u_n est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ avec, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 1$, $u_n^{(j)}(x) = (\ln n)^j u_n(x)$.
— Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n^{(j)}$ converge simplement sur $]-1, +\infty[$ puisque si $x > 1$ et si $\gamma \in]1, x[$ on a :
$$n^\gamma \frac{(\ln n)^x}{n^x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
— Pour tout $x \geqslant a$ on a : $\left|u_n^{(k)}(x)\right| \leqslant \underbrace{(\ln n)^j \dfrac{1}{n^a}}_{\text{indépendant de } x}$.

Il en résulte que : $\left\|u_n^{(k)}\right\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$ et la série de terme général $\dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$ est convergente d'après le point précédent. Ainsi la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$.

Ceci étant valable quelque soit le choix de $a > 1$, la fonction ζ est de classe C^k sur $]1, +\infty[$.
Ainsi la fonction ζ est de classe C^∞ sur D_ζ.

3.4 Le théorème d'intégration terme à terme.

Théorème 11
Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle I. On suppose que :

(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est intégrable sur I.

(H2) La série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction S continue par morceaux.

(H3) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \displaystyle\int_I |f_n(x)|\, \mathrm{d}x$ converge.

Alors S est intégrable sur I, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \displaystyle\int_I f_n(t)\mathrm{d}t$ converge et : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t.$

Exercice 18

1. Démontrer que l'on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.
2. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$ avec : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 19 (un théorème de Hardy.)
Soit $\sum a_n$ est une série de réels absolument convergente.

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n x^n}{n!}$ converge simplement vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que la fonction $g : x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

1. Puisque $\sum a_n$ est convergente, la suite (a_n) tend vers 0 à l'infinie donc est bornée par un réel $M \geqslant 0$. Pour a réel et x dans $[0,a]$ on a donc :
$$\left|\frac{a_n x^n}{n!}\right| \leqslant \frac{M a^n}{n!}.$$
Comme $\dfrac{Ma^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente (de somme $M\mathrm{e}^a$), la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n x^n}{n!}$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$: elle converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ et la fonction somme est continue sur $\mathbb{R}$. □

2. Pour $x \geqslant 0$ réel on a $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x}$. Pour n entier et $x \geqslant 0$ on pose $g_n(x) = \dfrac{a_n x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x}$. Les fonction g_n sont continues et intégrables sur $[0,+\infty[$ puisque :
$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = n! \int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction g et on a pour $x \geqslant 0$:
$$|g_n(x)| = |a_n|\,\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$$
donc $\displaystyle\int_I |g_n(x)| = |a_n|\,\frac{\Gamma(n+1)}{n!} = |a_n|$. Il en résulte que $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge et ainsi le théorème 11 s'applique : la fonction g est intégrable, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge avec : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

4 Intégrales à paramètre

Théorème 12 (Continuité des intégrales à paramètre)
Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : X \times I \to \mathbb{C}$. On suppose :

(H1) *Pour tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est C^0PM sur I.*
(H2) *Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X.*
(H3) *Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :* $(\forall x \in X)(\forall t \in I)\,(|f(x,t)| \leqslant \varphi(t))$.

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ (qui est correctement définie) est continue sur X.

Exercice 20
En admettant le théorème 5, démontrer le théorème 12.

Théorème 13 (Théorème de Leibniz)
Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : X \times I \to \mathbb{C}$. On suppose :

(H1) *Pour tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I (en particulier C^0PM).*
(H2) *Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur X.*
(H3) *La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est C^0PM sur I, pour tout $x \in X$.*
(H4) *Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :* $(\forall x \in X)(\forall t \in I)\left(\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)\right)$.

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur X avec : $g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 21
Démontrer le théorème 13.

Remarque. C'est l'hypothèse de domination $(H3)$ qui est essentielle. Lorsque cette hypothèse est encore satisfaite pour tout segment inclus dans X alors on peut conclure que f est continue sur ces segments, donc sur l'intérieur de X.

Exercice 22
Pour $x > 0$ on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que f est correctement définie.
2. Démontrer que la fonction f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (on précisera la dérivée de f).
3. En déduire, pour $a > 0$ et $b > 0$, une expression simple de $I(a, b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $x > 0$. On pose, pour $t > 0$, $h(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-t}}{t}$. La fonction h est continue sur $]0, +\infty[$.

   On a $t^2\,|h(t)| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $h(t) \underbrace{=}_{t\to 0} \dfrac{1 - xt - 1 + t + o(t)}{t} = 1 - x + o(1)$, donc h est prolongeable par continuité en 0. Ainsi h est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2. Pour $(x, t) \in]0, +\infty[^2$, on pose $g(x, t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-t}}{t}$.
   - A $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
   - A $t > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ de dérivée donnée par : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\mathrm{e}^{-tx}$.
   - A $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   - Pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[^2$ on a :
   $$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| = \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \underbrace{\mathrm{e}^{-at}}_{=\varphi(t)} \text{ dès que } x \geqslant a > 0.$$
   et la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre version C^1 s'applique : f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$.

   Ainsi f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ avec :
   $$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}.$$
   Comme $f(1) = 0$, il vient $\boxed{f(x) = -\ln x \text{ pour tout } x > 0}$.

3. Pour $a > 0$ et $b > 0$, on a :
   $$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\mathrm{d}t \underbrace{=}_{u=bt} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{a}{b}u} - \mathrm{e}^{-u}}{t}\mathrm{d}t = f(\tfrac{a}{b}).$$
   Ainsi $I(a, b) = \ln \dfrac{b}{a}$.

Exercice 23
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1 + t^2}\mathrm{d}t$ quand c'est possible.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Exercice 24
On considère pour x réel l'intégrale impropre $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

1. Démontrer que $I(x)$ a même nature que $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}(1 - \mathrm{e}^{-ux})\,\mathrm{d}u$.
2. Démontrer que si $x \in]-1, +\infty[$ alors $I(x)$ est bien définie.
3. Démontrer que J est une fonction dérivable sur $]-1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
4. En déduire que pour tout $x > -1$ l'expression de $I(x)$.

1. Le changement de variable (à justifier) $t = \mathrm{e}^{-u}$ permet de conclure.
2. Pour $x \in]-1, +\infty[$, $h : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u}(1 - \mathrm{e}^{-ux})$ est continue sur $]0, +\infty[$. Puis $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u}(1 - \mathrm{e}^{-ux}) \underset{u\to 0^+}{\sim} x$, donc $J(x)$ est une intégrale faussement impropre en 0.
   Enfin, par croissances comparées, $\exists \lim\limits_{u\to+\infty} u^2 h(u) = 0$. Il en résulte que h est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   Ainsi l'intégrale impropre $J(x)$ converge, $I(x)$ aussi et on a $J(x) = I(x)$.

3. On va appliquer le théorème de Leibniz pour montrer que J est dérivable sur $]-1,+\infty[$ avec :

$$J'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u(x+1)}\,\mathrm{d}u.$$

Justifions cela. Pour $(x,u) \in]-1,+\infty[\times]0,+\infty[$, posons :

$$h(x,u) = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}(1-\mathrm{e}^{-ux}) = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} - \frac{\mathrm{e}^{-u(1+x)}}{u}.$$

— Pour tout $x > -1$, $u \mapsto h(x,u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
— La fonction h est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[\times]0,+\infty[$. Ainsi, pour tout $x > -1$, la fonction $u \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,u)$ est continue.
— Pour tout $a \leqslant b$ dans $]-1,+\infty[$, pour tout $x \in [a,b]$ et pour tout $u > 0$, on a :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,u)\right| = \mathrm{e}^{-u(x+1)} \leqslant \mathrm{e}^{-u(a+1)} = \psi(u).$$

Or la fonction ψ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

On peut appliquer le théorème de Leibniz qui affirme que J est de classe C^1 sur tout segment de $]-1,+\infty[$ (donc sur $]-1,+\infty[$: la dérivation est une notion locale), avec :

$$J'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u(x+1)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{1+x}.$$

4. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > -1$, on a $J(x) = \ln(1+x) + C$. Comme $C = J(0) = 0$, il reste $I(x) = J(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x > -1$.

Exercice 25 (L'intégrale de Gauß)

1. Justifier que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Dans la suite de cet exercice on se propose de calculer : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   a) Démontrer que les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.

   b) Prouver que pour $x \geqslant 0$ réel on a : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

   En déduire que la fonction $\varphi = g + f^2$ est constante de valeur $\dfrac{\pi}{4}$.

   c) Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$ réel on a : $0 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$.

   d) En déduire la valeur de I.

3. (HP) En partant de I^2, et en utilisant les coordonnées polaires, proposer une autre méthode de calcul de I.

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, positive, et par croissance comparée on a :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2} = 0$$

donc $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2. a. • $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc f est de classe C^1, selon le théorème fondamental, avec $f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

• Pour tout x positif la fonction $h(x,\cdot) : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue donc intégrable sur $[0,1]$.
Puis $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$.
Pour x positif fixé, $t \mapsto -2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$ est continue sur $[0,1]$.
Pour t fixé dans $[0,1]$, $x \mapsto -2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$ est continue.
Pour tout $a > 0$ et tout $x \in [0,a]$ on a :

$$\left|-2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\right| \leqslant 2a$$

Or $t \mapsto 2a$ est intégrable sur $[0,1]$ ce qui assure que g est bien de classe C^1 avec dérivation sous le signe $\displaystyle\int$.

b. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour $x \geqslant 0$ on a :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= g'(x) + 2f'(x)f(x)\\ &= -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Mais avec le changement de variables $s = xt$ on obtient $\mathrm{d}s = x\mathrm{d}t$ et ainsi

$$x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s$$

ce qui donne $\varphi'(x) = 0$. Il en résulte, puisque $\mathbb{R}^+$ est un intervalle, que φ est constante de valeur :

$$\varphi(0) = g(0) + f(0)^2 = g(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

c. On a pour $t \in [0,1]$ et x réel positif :

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}.$$

En intégrant il vient le résultat souhaité.

d. La question précédente assure que $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et ainsi selon la question 2b on a :

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

On a donc :

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3. Rapidement.

$$\begin{aligned}I^2 &= \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 \underbrace{=}_{Fubini} \iint_{(\mathbb{R}^+)^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \quad \text{(Changement de variables...)}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Pour démontrer qu'une intégrale à paramètre est de classe C^∞ on peut utiliser le théorème suivant :

Théorème 14 (Dérivabilité des intégrales à paramètre, version C^k.)
Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : X \times I \to \mathbb{C}$. On suppose :

- ***(H1)** Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur X.*
- ***(H2)** Pour tout $x \in X$ et tout $j \in \{0,\dots,k-1\}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est intégrable sur I.*
- ***(H3)** Pour tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est C^0PM sur I.*
- ***(H4)** Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que : $(\forall x \in X)(\forall t \in I)\left(\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)\right)$.*

La fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est alors de classe C^k sur X avec : $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. C'est l'hypothèse de domination $(H4)$ qui est essentielle. Lorsque cette hypothèse est encore satisfaite pour tout segment inclus dans X alors on peut conclure que f est de classe C^k sur ces segments, donc sur X.

Exercice 26
Pour x réel on pose, dès que cela a un sens : $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t$.

1. Quelle est le domaine de définition de f ?
2. Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27 (La fonction Γ)
Pour $x > 0$, on considère $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que l'on définit ainsi correctement une fonction $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$.
2. Démontrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
3. a) Démontrer que pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\Gamma(n+1)$.

4. Donner un équivalent de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers 0^+.
5. Démontrer que Γ est C^∞ et préciser $\Gamma^{(k)}$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.
6. Dresser le tableau de variation de Γ. Qui est $\Gamma(1/2)$?
7. Pour $s > 1$ réel on pose : $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$.

   Démontrer que l'on a : $\phi(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(s)\zeta(s)$.

1. Pour le lecteur
2. Posons $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ pour tout $t > 0$ et $x > 0$. Alors :
   — A $x > 0$ fixé la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc $C^0 - PM$.
   — A $t > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0, +inft[$.
   — Soient $a < b$ des réels tels que $[a,b] \subset]0, +\infty[$. Pour tout $t > 0$ et $x \in [a,b]$ on a :
   $$|f(x,t)| \leqslant (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t} = \varphi(t).$$
   En effet, à $t > 0$ fixé, $x \mapsto e^{(x-1)\ln t}$ peut-être décroissante (si $t < 1$) ou croissante (si $t \geqslant 1$) sur $[a,b]$: cette fonction est donc majorée par $e^{(a-1)\ln t}$ ou $e^{(b-1)\ln t}$, en particulier par la somme des deux. Enfin φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions intégrables sur cet intervalle (première question !).

   On peut alors appliquer le **théorème de continuité des intégrales à paramètre** : la fonction Γ est continue sur $[a,b]$. Ceci étant vrai quelque soit le choix du segment $[a,b] \subset]0, +\infty[$, la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. a) On fait une IPP (attention, il y a aussi problème en 0 !)
   b) Petite récurrence...
4. On a pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$. Par continuité de Γ en 1, il vient :
   $$\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$
5. Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}$ fixé la fonction Γ soit de classe C^k avec :
   $$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$
   — A $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto f_k(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En effet elle y est continue et on a :
   • $t^2 f_k(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(.,t)$ est intégrable en $+\infty$.
   • Comme $1 - x < 1$, il existe $\gamma \in]1-x, 1[$ et alors :
   $$t^\gamma f_k(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^\gamma (\ln t)^k t^{x-1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$
   par croissances comparées. Il en résulte que $t \mapsto f_k(x,t)$ est intégrable en 0.
   — A $t > 0$ fixé, la fonction $f_k(x,.)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ de dérivée donnée par :
   $$\frac{\partial f_k}{\partial x}(x,t) = (\ln t) f_k(x,t).$$
   — A $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f_k}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   — Soient $a < b$ tels que $[a,b] \subset]0, +\infty[$. Pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a,b]$ on a :
   $$\left|\frac{\partial f_k}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant (t^{a-1} + t^{b-1})(\ln t)^{k+1} e^{-t} = \varphi(t)$$
   Mais la fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions intégrables sur cet intervalle (c'est le premier tiré ci-dessus !)

   On peut alors appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre version C^1 qui assure que $\Gamma^{(k)}$ est de classe C^1 sur $[a,b]$. Ceci étant valable quelque soit le choix de l'intervalle $[a,b] \subset]0, +\infty[$, $\Gamma^{(k)}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et pour $x > 0$ on a :
   $$\Gamma^{(k+1)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^{k+1} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Comme Γ est C^0 sur $]0,+\infty[$, on peut conclure par récurrence que Γ est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

6. Pour le lecteur. Pour $\Gamma(1/2)$ un changement de variable se ramène à l'intégrale de Gauß

7. On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\,dt = -\int_0^{+\infty} t^{s-1}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{kt}\,dt$ et on peut permuter en utilisant le théorème d'intégration terme à terme (et en utilisant un changement de variable : $u = kt$).

Exercice 28 (Transformée de Laplace)
Dans tout l'exercice on note :

- E l'ensemble des fonctions $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $]0,+\infty[$;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $[0,+\infty[$.

Pour tout f dans E on appelle transformée de Laplace *de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :*

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$$

1. Démontrer que $\mathcal{L} : E \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ est linéaire.
2. Démontrer que $F \subset E$.
3. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. Soit la fonction $g_n^{(f)} : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour $t \geqslant 0$, par $g_n^{(f)}(t) = t^n f(t)$.
   Démontrer que $g_n^{(f)}$ est un élément de E.
4. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
   Soit $f : [0,+\infty[$ dans E de classe C^1, croissante et bornée sur $[0,+\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que, pour tout x dans $]0,+\infty[$, on a :
   $$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$
5. **Régularité d'une transformée de Laplace**
   a) Démontrer que pour tout f dans E la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1^{(f)})$ où $g_1^{(f)}$ a été définie à la question 3.
   b) Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.
6. Soit $f \in F$.
   a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.
   b) **Théorème de la valeur initiale**
   On suppose de plus que f est de classe C^1 et croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

Dans la suite de l'exercice, f est un élément de E.

7. **Théorème de la valeur finale**
   On suppose dans cette question que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel.
   a) Démontrer que f appartient à F.
   b) Démontrer, à l'aide du théorème de convergence dominée à paramètre continu, que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.
   c) Lorsque $\ell \neq 0$ déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.
8. Dans cette question on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).
9. Dans cette question on suppose seulement que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et on pose pour tout $x \geqslant 0$:
   $$R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt.$$
   a) Démontrer que pour tout $x > 0$ réel on a $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.
   b) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).
10. **Une application : calcul de l'intégrale de Dirichlet**
   Ici f est la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ si $t \in]0,+\infty[$.
   a) Démontrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
   b) Soit $x > 0$. Démontrer que la fonction $t \mapsto (\sin t)\,e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin t)\,e^{-xt}\,dt$.

c) Déterminer pour $x > 0$ une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

11. **Injectivité de la transformation de Laplace**. Le but de cette question est de démontrer que $\mathcal{L} : E \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ est injective. On considère donc f dans E telle que $\mathcal{L}(f) = 0$.

a) **Le théorème des moments**
Soient $a < b$ des réels et $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout n entier naturel on ait : $\displaystyle\int_a^b t^n h(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Démontrer que $h = 0$.

b) Soit $g :]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(-\ln t)$ si $t \in]0, 1]$. On pose pour u dans $]0, 1]$, $G(u) = \displaystyle\int_1^u g(s)\,\mathrm{d}s$.

Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a $\displaystyle\int_0^1 u^{x-1} g(u)\,\mathrm{d}u = 0$ et conclure.

1. ...
2. F est non vide. Puis si $f \in F$, il existe M dans $\mathbb{R}^+$ tel que $|f(t)| \leqslant M$ pour tout t dans $[0, +\infty[$.
Soit $x > 0$ réel. Pour tout t dans $[0, +\infty[$ on a alors :

$$\left|f(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant M\mathrm{e}^{-xt}$$

Mais $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (par exemple en prenant une primitive...) avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$: par domination $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et ainsi $f \in E$.Il en résulte que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$: $\boxed{E \text{ est un espace vectoriel}}$.

3. • Par croissance comparée on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\frac{tx}{2}} = 0$ i.e. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^n\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^{-\frac{tx}{2}}} = 0$.
Ainsi il existe $A \geqslant 0$ tel que pour tout $t \geqslant A$ on ait $\dfrac{t^n\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^{-\frac{tx}{2}}} \leqslant 1$, c'est à dire : $t^n\mathrm{e}^{-tx} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{tx}{2}}$.
• Soit $x > 0$. La fonction $g_n^{(f)}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $t \geqslant A_x$ on a :

$$\left|g_n^{(f)}(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| = \left|t^n f(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant |f(t)|\,\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}.$$

Or f est dans E donc $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ est intégrable sur $[A_n, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi $g_n^{(f)}$ est un élément de E.

4. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
Remarquons que f' est continue puisque f est de classe C^1.
Soit $x > 0$. Pour tout $X > 0$ on a :

$$\int_0^X f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{IPP} \left\{-f(t)\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\right]_0^X + \frac{1}{x}\int_0^X f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$
$$= -f(X)\frac{\mathrm{e}^{-xX}}{x} + \frac{f(0)}{x} + \frac{1}{x}\int_0^X f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Il en résulte que $\exists \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^X f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\frac{f(0)}{x} + L(f)$.
Comme la fonction f est croissante, $f' \geqslant 0$ et ainsi f' est bien dans E avec :

$$\boxed{\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)} \quad \text{pour tout } x \text{ dans }]0, +\infty[$$

5. **Régularité d'une transformée de Laplace**

a) Soit $a > 0$. On pose $h(x, t) = f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^*$.

— Pour tout $x > 0$ la fonction $h(x, .)$: $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$.
— Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $h(., t) : x \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -tf(t)\mathrm{e}^{-tx}.$$

— Pour tout $x > 0$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
— Soit $a > 0$. Pour tout $t \geqslant 0$ $x > a$, on a :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant t\,|f(t)|\,\mathrm{e}^{-at}$$

et $t \mapsto t\,|f(t)|\,\mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (3).

Les hypothèse du théorème de dérivation des intégrales à paramètre sont vérifiées : la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$, avec dérivation sous le signe intégral. Ceci étant vrai pour tout $a>0$, on peut affirmer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ avec dérivation sous le symbole intégrale : $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1^{(f)})$.

b) On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$, récurrence qui est initialisée avec la question précédente.
Supposons que pour un certain $n \geqslant 1$ fixé la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^n avec $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n^{(f)})$ alors, puisque g_n est dans E, $\mathcal{L}(g_n^{(f)})$ est C^1 selon la question précédente avec $\mathcal{L}(g_n)' = -\mathcal{L}(\mathrm{Id}\times g_n^{(f)}) = -\mathcal{L}(g_{n+1}^{(f)})$ ce qui démontre que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^{n+1}. En conclusion $\mathcal{L}(f)$ est C^∞ avec pour $n \geqslant 1$ entier :

$$\boxed{\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n^{(f)})}$$

6. a) Soit M qui borne f sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x>0$ on a : $|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant M\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{x}$ donc, par sandwich, $\boxed{\exists \lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0}$.

b) **Théorème de la valeur initiale**
On peut appliquer le résultat de la question 4 à bon droit : f' est dans E et $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$ pour tout $x>0$. Selon la question précédente, puisque f' est dans F, on obtient :

$$\boxed{\exists \lim_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)}.$$

7. **Théorème de la valeur finale**

a) Il faut montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ il existe A réel positif tel que pour tout $x \geqslant A$ on ait $|g(x)-\ell| \leqslant 1$ donc $|g(x)| \leqslant |\ell|+1$. Puis la fonction f est **continue** sur le **segment** $[0,A]$: elle y est donc bornée par un réel M. On a alors pour tout x dans $\mathbb{R}^+$:

$$|f(x)| \leqslant \max(M, |\ell|+1)$$

b) • Soit $x>0$. Via le changement de variable affine $u = xt$ on a :

$$x\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} xf(t)\mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{-t} f(\tfrac{t}{x})}_{=h(x,t)}\,\mathrm{d}t.$$

• Puis on a :

— Pour tout $t>0$ réel on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x,t) = \ell\mathrm{e}^{-t} = \lambda(t)$;
— Les fonctions $t\mapsto\lambda(t)$ et $t\mapsto h(x,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$.
— Pour tout $x>0$ et tout $t\geqslant 0$ on a, lorsque M est un réel qui borne f :

$$|h(x,t))| \leqslant M\mathrm{e}^{-t},$$

et $t\mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Les deux points précédents permettent d'appliquer le **théorème de convergence dominée de Lebesgue à paramètre continu** qui affirme que $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ell\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \ell$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell.$$

c) Pour $\ell \neq 0$, on a : $\boxed{\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\ell}{x}}$.

8. On a :

— Pour tout $t>0$ réel on a : $\lim\limits_{x\to0} f(t)\mathrm{e}^{-xt} = f(t)$;
— Les fonctions f et $t\mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$.
— Pour tout $x>0$ et tout $t\geqslant 0$ on a :

$$\left|f(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant f(t)$$

et f est supposée intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème de convergence dominée à paramètre continu s'applique : $\mathcal{L}_f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $\mathcal{L}(f)$ est prolongeable par continuité en 0 en posant : $\mathcal{L}_f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

9. a) • Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Comme f est **continue**, le **théorème fondamental** assure que F est de classe C^1 avec $F' = f$. Mais pour tout $x \geqslant 0$ on a :

$$R(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - F(x)$$

donc R est de classe C^1 avec $R' = -F' = -f$.

• Soit $x > 0$. On a : $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t == \{-R(t)\mathrm{e}^{-xt}]_0^{+\infty} - x\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
Ceci est correct à posteriori car $R(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et ainsi R est bornée sur $[0, +\infty[$ (voir question 7a). Ainsi $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

b) Le théorème de la valeur finale s'applique à $\mathcal{L}(R)$:

$$x\mathcal{L}(R)(x)\underset{x\to 0}{0}.$$

On peut donc prolonger la fonction $\mathcal{L}(f)$ en 0 en posant $\mathcal{L}(f)(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

10. **Une application : calcul de l'intégrale de Dirichlet**

a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$. Puis, si $X > 0$, une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t &= \left\{\frac{-\cos t}{t}\right]_1^X - \int_0^X \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\cos 1}{X} - \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Mais la fonction cos est bornée sur $\mathbb{R}$ d'où $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos X}{X} = 0$ et pour tout $t \geqslant 1$ réel on a $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ donc $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$, autrement dit l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Le changement de variable $t = u + n\pi$ donne pour tout $n \geqslant 1$ entier :

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u+n\pi)|}{u+n\pi}\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\mathrm{d}u \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin u\mathrm{d}u = \frac{2}{(n+1)}$$

donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

La fonction f n'est donc pas intégrable sur $[\pi, +\infty[$.

c) • La fonction $t \mapsto (\sin t)\,\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car continue sur $\mathbb{R}$ et dominée par $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

• Notons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. Deux IPP successives donnent : $(1+x^2)I = 1$ et ainsi $I = \dfrac{1}{1+x^2}$.

d) Pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ n'est autre que $-\mathcal{L}(f)'(x)$ donc on a

$$\mathcal{L}(f)(x) = -\arctan x + C$$

où C est une constante. Mais $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ donc $C = \dfrac{\pi}{2}$ et on a vu aussi (question 9)que :

$$\lim_{x\to 0} \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2}$$

11. **Le théorème des moments**
Par combinaison linéaire, si P est un polynôme à coefficients réels, on obtient :

$$\int_a^b P(t)h(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Prenons alors une suite (P_k) dans $\mathbb{R}[X]$ qui converge uniformément vers h sur le segment $[a,b]$. Il vient $P_k h \xrightarrow[{[a,b]}]{CU} h^2$ et ainsi :

$$\lim_{k\to+\infty} \underbrace{\int_a^b P_k(t)h(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} = \int_a^b h(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Par unicité de la limite, on obtient : $\displaystyle\int_a^b h(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. Comme h^2 est continue et positive, on peut affirmer que $h = 0$ sur $[a,b]$.

12. a) Soit $x > 0$. Le changement de variable $t = -\ln u$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ donne de suite :

$$(\heartsuit) \quad \boxed{\int_0^1 u^{x-1}g(u)\,\mathrm{d}u = 0 \quad \text{pour tout } x > 0}$$

b) • La fonction G est, puisque g est continue sur $]0,1]$, de classe C^1 sur $]0,1]$ avec $G' = g$. Soit $n \geqslant 0$. Une intégration par parties formelle (les intégrales en jeu sont impropres en 0) donne alors :

$$0 = \int_0^1 u^{n+1}g(u)\,\mathrm{d}u = \{u^n G(u)]_0^1 - (n+1)\int_0^1 u^n G(u)\,\mathrm{d}u.$$

Mais en prenant $x = 1$ dans $(\heartsuit)$, on obtient $\displaystyle\int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u = 0$: la fonction G se prolonge donc par continuité en 0. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{u\to 0} u^n G(u) = 0$. L'intégration par partie ci-dessus est donc correcte.

On obtient alors : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 u^n G(u)\,\mathrm{d}u = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

• On applique le théorème des moments à la fonction G (que l'on a prolongé par continuité en 0) : pour tout t dans $[0,1]$ on a $G(t) = 0$. En dérivant, il vient $g(t) = 0$ pour tout t dans $]0,1]$: la fonction f est nulle. L'application linéaire $\mathcal{L}$ a donc un noyau réduit à $\{0\}$: elle est injective.

Remarque. Lorsqu'on ne peut trouver de domination, l'emploi du théorème 13 est impossible. On peut alors utiliser le théorème 4. Cela sera illustré dans l'exercice 29.

Exercice 29
Pour x réel on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que l'on a ainsi défini correctement une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser f'.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $g_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^n \frac{\cos xt}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
   a) Justifier que chaque g_n est de classe C^1.
   b) Justifier que l'on définit correctement une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant pour tout x réel :
   $$h(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
   c) Démontrer que la suite (g'_n) converge uniformément sur les compacts de $]0,+\infty[$ vers h.
   d) En déduire que f' est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et précisez f'' sur cet intervalle.
3. Déterminer la fonction f. La fonction f' est-elle dérivable en 0 ?

1. On a :

• Fixons x réel. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} = f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout $t > 0$ on a :
$$\left|\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\right| \leqslant \frac{1}{t(1+t^2)}.$$
Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, par domination $f(x,.)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Puis $\dfrac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} \underset{t\to 0^+}{\sim} x$. Il en résulte que $f(x,.)$ est intégrable sur $[0,1]$.
En résumé $f(x,.)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

• Pour (x,t) dans $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe et, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Pour tout (x,t) dans $\mathbb{R}\times I$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ où $\varphi : t\mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

Les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ version C^1 sont satisfaites. On peut donc conclure que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On peut noter que la fonction f est impaire.

2. a. Fixons $n\in\mathbb{N}$ et posons pour tout t réel et x réel : $g(x,t) = \dfrac{\cos(tx)}{1+t^2}$.

— Pour tout $x\in\mathbb{R}$ la fonction $t\mapsto \dfrac{\cos(tx)}{1+t^2}$ est continue sur $[0,n]$.

— Pour tout $t\in[0,n]$ la fonction $x\mapsto \dfrac{\cos(tx)}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ de dérivée donnée par : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{t\sin(tx)}{1+t^2}$.

— Pour tout x réel, la fonction $t\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,n]$.

— Pour tout t dans $[0,n]$ et x réel on a :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant n$$

est $t\mapsto n$ est intégrable sur le segment $[0,n]$.

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres version C^1 permet d'affirmer que g_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec :

$$g_n'(x) = -\int_0^n \frac{t\,\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b. Une IPP permet de montrer que h est correctement définie.

c. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x>0$ on a :

$$g_n'(x) - h(x) = \int_n^{+\infty} \frac{t\,\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = I_n(x).$$

Une IPP donne :

$$I_n(x) = -\frac{1}{x}\,\frac{n}{n^2+1}\cos(nx) + \frac{1}{x}\int_n^{+\infty} \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\cos tx\,\mathrm{d}t.$$

De là, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x>0$, on a :

$$\begin{aligned}
|I_n(x)| &\leqslant \frac{1}{x}\,\frac{n}{n^2+1} + \underbrace{\frac{1}{x}\int_n^{+\infty} \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t}_{=R_n}\\
&\leqslant \frac{1}{a}\left(\frac{n}{n^2+1} + R_n\right) \quad \text{dès que } x\geqslant a
\end{aligned}$$

Mais $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+R_n\right) = 0$ (car R_n est le reste d'une intégrale convergente) donc $I_n \xrightarrow[{[a,+\infty[}]{CU} 0$.

Conclusion. La suite (g_n') converge uniformément sur les segments de $]0,+\infty[$ vers h.

d. Comme $g_n \xrightarrow[{]0,+\infty[}]{CS} f'$, on peut conclure que f' est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ avec $f''=h$.

3. • On a $\dfrac{1}{t(t+1)^2} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{1+t^2}$ pour tout $t>0$. Il en résulte, pour $x>0$, que :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{t}\,\mathrm{d}t + h(x) = \frac{\pi}{2} + f(x).$$

On a donc, pour $x>0$, $f(x) = \alpha\mathrm{e}^x + \beta\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{\pi}{2}$ où α et β sont des constantes réelles. Comme $|f(x)|\leqslant \dfrac{\pi}{2}|x|$, il vient $\alpha=0$. Mais f est continue en 0, avec $f(0)=0$, donc $\beta = -\dfrac{\pi}{2}$. Il vient donc $f(x) = \dfrac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-x})$ si $x\geqslant 0$. Par imparité on obtient alors l'expression de f.
Sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$, et n'est pas dérivable en 0.