Interversion des limites

Table des matières

1 Rappels sur l'intégration

Je rappelle deux théorèmes concernant l'intégration et les intégrales impropres.

Théorème 1
Soient f et g dans $C^0([a,+\infty[,\mathbb{C})$.

(1) *Si $|f| \leqslant |g|$ alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f et la non intégrabilité de f implique la non intégrabilité de g.*

(2) *Si $f(x) \underset{+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$ alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f.*

(3) *Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ alors les fonction f et g sont simultanément intégrables sur $[a,+\infty[$, autrement dit les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t$ ont même nature.*

<u>**Conséquence fondamentale**</u>. Pour montrer l'intégrabilité d'une fonction C^0 $f : [a,+\infty[\to \mathbb{C}$, on cherche $\alpha > 1$ tel que :

$$t^\alpha f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans ce cas $f(t) \underset{+\infty}{=} O\big(\frac{1}{t^\alpha}\big)$ et comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann : $\alpha > 1$), on peut conclure, par domination, que f est intégrable.

Théorème 2
Soient $\overline{a} < \overline{b}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, $f :]\overline{a},\overline{b}[\to \mathbb{R}$ continue , $\varphi :]\overline{\alpha},\overline{\beta}[\to]\overline{a},\overline{b}[$ une bijection croissante de classe C^1.
Les intégrales impropres $\displaystyle\int_{\overline{a}}^{\overline{b}} f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{\overline{\alpha}}^{\overline{\beta}} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et de même valeur si convergence.

Exercice 1
Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable. Démontrer que $g : t \mapsto \dfrac{\sqrt{f(t)}}{t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Exercice 2 (Intégrales de Bertrand)
Pour α et β dans $\mathbb{R}$ on considère l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que si $\alpha > 1$ l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta}$ est convergente.
2. Démontrer que si $\alpha < 1$ l'intégrale impropre $I_{\alpha,\beta}$ est divergente.
3. On suppose ici que $\alpha = 1$. En effectuant le changement de variable $t = \mathrm{e}^u$, étudier la convergence de l'intégrale impropre $I_{1,\beta}$.

Exercice 3
On considère l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que cette intégrale impropre est convergente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
3. Qu'en déduire pour la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$?

2 Interversion des limites pour les suites de fonctions

2.1 Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions sur un segment

Théorème 3
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ (où $a < b$) qui converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4

1. Savez-vous démontrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue ?
2. Démontrer le théorème 3.

Exercice 5

1. Trouver une suite (f_n) de fonctions continues qui converge simplement (mais non uniformément) vers une fonction f intégrable sur $[0,1]$ avec
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Trouver une suite (f_n) de fonctions continues qui converge simplement (mais non uniformément) vers une fonction f intégrable sur $[0,1]$ avec :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6
Donner un contre exemple graphique permettant d'infirmer la conclusion du théorème 3 dans le cas où on remplace le segment $[a,b]$ par un intervalle I non borné.

Exercice 7
Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonction définie sur $I = [0,+\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$.

1. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
2. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$?

Exercice 8
Démontrer que si l'on remplace $[a,b]$ par un intervalle borné I dans l'énoncé du théorème 3 alors, en supposant chaque f_n intégrable sur I, la conclusion est encore valable.

2.2 Théorèmes de dérivabilité pour les suites de fonctions

Théorème 4 (Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions)
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite d'applications de classe C^1 à valeurs dans un espace de Banach, qui converge simplement vers une fonction f sur I et telle que la suite (f_n') converge uniformément vers une fonction g. Alors :

- *La suite (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f.*
- *La fonction f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.*

Exercice 9
Démontrer le théorème 4.

2.3 Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions

Théorème 5 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue.)
Soit (f_n) une suite de fonctions, à valeurs complexes, continue par morceaux sur un intervalle I. On suppose :

(H1) La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.
(H2) Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout n entier on ait $|f_n| \leqslant \varphi$.

Alors la fonction f est intégrable sur I (ainsi que chaque fonction f_n) et on a :

$$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10 (Illustrations élémentaires)

1. *Sur un segment.* La suite de fonction $(\sin^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,\pi]$? Démontrer que : $\exists \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
2. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin\frac{x}{n}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2.4 Théorème de convergence dominée à paramètre continu

Théorème 6 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu.)
Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : X \times I \to \mathbb{C}$ et $\overline{a}$ une borne de X dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose :

(H1) Pour $t \in I$ fixé, $\lim\limits_{x\to\overline{a}} f(x,t) = \ell(t) \in \mathbb{C}$.
(H2) Pour x fixé dans I, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont C^0PM sur I.
(H3) Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :
$$(\forall x \in X)(\forall t \in I)\,(|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)).$$

La fonction ℓ est intégrable sur I et on a :

$$\lim_{x\to a}\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 11
En admettant le théorème 5, démontrer le théorème 6.

3 Interversion des limites pour les séries de fonctions

3.1 Le théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$. En appliquant le théorème 3 à la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_n$ on obtient de suite le résultat suivant.

Théorème 7
Si $\sum f_n$ *est une série de fonctions continues sur le segment* $[a,b]$ *qui converge uniformément sur* $[a,b]$ *alors la série* $\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *converge avec :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 12 (Avec des séries entières)
Soient $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$ entier et tout $r \in]0, R[$ on a :

$$2\pi a_n r^n = \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

2. En déduire qu'une fonction entière (i.e. une fonction série entière de rayon de convergence infini) qui est bornée est constante (théorème de Liouville).
3. En déduire (en admettant que l'inverse d'une série entière est développable en série entière de rayon de convergence infini) le théorème de D'alembert-Gauß.

Exercice 13 (Une utilisation du produit de Cauchy)
Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $r \in]0, R[$ et $Z \in \mathbb{C}$ tel que $|Z| < r$, on pose :

$$I(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{i\theta} f(r\mathrm{e}^{i\theta})}{r\mathrm{e}^{i\theta} - Z}\,\mathrm{d}\theta.$$

Démontrer que $f(Z) = I(r)$.

Exercice 14 (Intégrale de Poisson)
Pour $r \in \mathbb{R}$ on considère l'intégrale impropre :

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln(1 + r^2 - 2r\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

a. Pour r dans $]-1, 1[$ démontrer que :

$$\ln(1 + r^2 - 2r\cos\theta) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \cos n\theta}{n}.$$

En déduire la valeur de $I(r)$ sur cet intervalle.

b. Pour $|r| > 1$, calculer $I(r)$.

3.2 Théorème de dérivation pour les séries de fonctions

Théorème 8
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Soient* (f_n) *une suite de fonctions* ***de classe*** C^1 *de* I *dans* $\mathbb{K}$ *et* $f : I \to \mathbb{K}$*. On suppose que :*

(1) *La série de fonctions* $\sum f_n$ ***converge simplement*** *vers* S *sur* I*.*
(2) *La série de fonctions* $\sum f_n'$ ***converge uniformément*** *sur tout segment* $[a,b] \subset I$*.*

Alors la fonction somme S *est de classe* C^1 *sur* I *avec* $S' = \sum_{n=0}^{=\infty} f_n'$*.*

Remarque 3.1
La conclusion est bien sûr valable lorsque l'hypothèse (2) est remplacée par : « *la série de fonctions* $\sum f_n'$ ***converge uniformément*** *sur* I *vers une fonction* h ».

Exercice 15
Démontrer le théorème 8.

Théorème 9
Soient I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* k *un entier naturel non nul. Soient* (f_n) *une suite de fonctions* ***de classe*** C^k *de* I *dans* $\mathbb{K}$ *et* $f : I \to \mathbb{K}$*. On suppose que :*

(1) *Pour tout* $i \in \{0,\dots,k-1\}$ *la série de fonctions* $\sum f_n^{(i)}$ ***converge simplement*** *vers une fonction* φ_i *sur* I.
(2) *La série de fonctions* $\sum f_n^{(k)}$ ***converge uniformément*** *sur tout segment* $[a,b] \subset I$.

Alors la fonction $f = \varphi_0$ *est de classe* C^k *sur* I *avec, pour tout* $i \in \{0,\dots,k\}$: $f^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$.

3.3 Théorème de la double limite pour les séries de fonctions

Théorème 10 (Théorème de la double limite)
Soit (f_n) *une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle* X *de* $\mathbb{R}$ *et* a *un point adhérent à* X. *On suppose que :*

(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ *la fonction* f_n *admet une limite finie* ℓ_n *en* a.
(H2) La série de fonction $\sum f_n$ *converge uniformément sur* X.

Alors la série $\sum \ell_n$ *converge et on a :*

$$S(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Exercice 16
Démontrer le théorème 10

Remarque 3.2
Ce théorème peut s'utiliser pour :

— Assurer la convergence d'une série ;
— Déterminer la limite en un point adhérent à X de la fonction somme ;
— Pour démontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur un un certain intervalle.

Par exemple, la série de fonction $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n x^n}{n+1}$ converge simplement sur $]-1,0]$,normalement donc uniformément sur chaque intervalle de la forme $[a,0]$ avec $a \in]-1,0[$ (puisque $\|f_n\|_{\infty,[a,0]} \leqslant |a|^n$), mais ne converge pas uniformément sur $]-1,0]$, grâce au théorème de la double limite, puisque la série harmonique diverge.

Exercice 17 (La fonction ζ de Riemann)
On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

On note D_ζ son ensemble de définition.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose aussi $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

1. Déterminer D_ζ.
2. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1,+\infty[$?
3. Montrer que ζ est continue sur D_ζ.
4. Montrer que ζ est de classe C^1 sur D_ζ et déterminer la fonction ζ' à l'aide d'une somme d'une série.
5. Déterminer, si elle existe, la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
6. Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.
   a) Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.
   b) En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$, on a :
   $$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$
   c) Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
7. Donner l'allure du graphe de la fonction ζ.
8. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^∞ sur D_ζ.

3.4 Le théorème d'intégration terme à terme.

Théorème 11
Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle I. On suppose que :

> *(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est intégrable sur I.*
>
> *(H2) La série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction S continue par morceaux.*
>
> *(H3) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n(x)| \, \mathrm{d}x$ converge.*

Alors S est intégrable sur I, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 18

1. Démontrer que l'on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.
2. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ avec : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 19 (un théorème de Hardy.)
Soit $\sum a_n$ est une série de réels absolument convergente.

1. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n x^n}{n!}$ converge simplement vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction $g : x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

4 Intégrales à paramètre

Théorème 12 (Continuité des intégrales à paramètre)
Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : X \times I \to \mathbb{C}$. On suppose :

> ***(H1)*** *Pour tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est C^0PM sur I.*
>
> ***(H2)*** *Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X.*
>
> ***(H3)*** *Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que : $(\forall x \in X)(\forall t \in I)\,(|f(x,t)| \leqslant \varphi(t))$.*

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t) \, \mathrm{d}t$ (qui est correctement définie) est continue sur X.

Exercice 20
En admettant le théorème 5, démontrer le théorème 12.

Théorème 13 (Théorème de Leibniz)
Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : X \times I \to \mathbb{C}$. On suppose :

> ***(H1)*** *Pour tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I (en particulier C^0PM).*
>
> ***(H2)*** *Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur X.*
>
> ***(H3)*** *La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est C^0PM sur I, pour tout $x \in X$.*
>
> ***(H4)*** *Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que : $(\forall x \in X)(\forall t \in I)\left(\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)\right)$.*

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t) \, \mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur X avec :
$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 21
Démontrer le théorème 13.

Remarque. C'est l'hypothèse de domination $(H3)$ qui est essentielle. Lorsque cette hypothèse est encore satisfaite pour tout segment inclus dans X alors on peut conclure que f est continue sur ces segments, donc sur l'intérieur de X.

Exercice 22
Pour $x > 0$ on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que f est correctement définie.
2. Démontrer que la fonction f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (on précisera la dérivée de f).
3. En déduire, pour $a > 0$ et $b > 0$, une expression simple de $I(a, b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 23
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ quand c'est possible.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Exercice 24
On considère pour x réel l'intégrale impropre $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

1. Démontrer que $I(x)$ a même nature que $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}(1 - \mathrm{e}^{-ux})\,\mathrm{d}u$.
2. Démontrer que si $x \in]-1, +\infty[$ alors $I(x)$ est bien définie.
3. Démontrer que J est une fonction dérivable sur $]-1, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
4. En déduire que pour tout $x > -1$ l'expression de $I(x)$.

Exercice 25 (L'intégrale de Gauß)

1. Justifier que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   Dans la suite de cet exercice on se propose de calculer : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \text{ et } \; g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
   a) Démontrer que les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.
   b) Prouver que pour $x \geqslant 0$ réel on a : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que la fonction $\varphi = g + f^2$ est constante de valeur $\dfrac{\pi}{4}$.
   c) Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$ réel on a : $0 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$.
   d) En déduire la valeur de I.
3. En partant de I^2, et en utilisant les coordonnées polaires, proposer une autre méthode de calcul de I.

Pour démontrer qu'une intégrale à paramètre est de classe C^∞ on peut utiliser le théorème suivant :

Théorème 14 (Dérivabilité des intégrales à paramètre, version C^k.)
Soient I et X deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : X \times I \to \mathbb{C}$. On suppose :

(H1) *Pour tout $t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^k sur X.*

(H2) *Pour tout $x \in X$ et tout $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est intégrable sur I.*

(H3) Pour tout $x \in X$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est C^0PM sur I.
(H4) Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que : $(\forall x \in X)(\forall t \in I)\left(\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)\right)$.

La fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est alors de classe C^k sur X avec : $g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. C'est l'hypothèse de domination $(H4)$ qui est essentielle. Lorsque cette hypothèse est encore satisfaite pour tout segment inclus dans X alors on peut conclure que f est de classe C^k sur ces segments, donc sur X.

Exercice 26
Pour x réel on pose, dès que cela a un sens : $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t$.

1. Quelle est le domaine de définition de f ?
2. Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27 (La fonction Γ)
Pour $x > 0$, on considère $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que l'on définit ainsi correctement une fonction $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$.
2. Démontrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
3. a) Démontrer que pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\Gamma(n+1)$.
4. Donner un équivalent de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers 0^+.
5. Démontrer que Γ est C^∞ et préciser $\Gamma^{(k)}$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.
6. Dresser le tableau de variation de Γ. Qui est $\Gamma(1/2)$?
7. Pour $s > 1$ réel on pose : $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$.
   Démontrer que l'on a : $\phi(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - 1}dt = \Gamma(s)\zeta(s)$.

Exercice 28 (Transformée de Laplace)
Dans tout l'exercice on note :

- E l'ensemble des fonctions $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ soit intégrable sur $]0,+\infty[$;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $[0,+\infty[$.

Pour tout f dans E on appelle transformée de Laplace *de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :*

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que $\mathcal{L} : E \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ est linéaire.
2. Démontrer que $F \subset E$.
3. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. Soit la fonction $g_n^{(f)} : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour $t \geqslant 0$, par $g_n^{(f)}(t) = t^n f(t)$.
   Démontrer que $g_n^{(f)}$ est un élément de E.
4. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
   Soit $f : [0,+\infty[$ dans E de classe C^1, croissante et bornée sur $[0,+\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que, pour tout x dans $]0,+\infty[$, on a :
   $$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$
5. **Régularité d'une transformée de Laplace**
   a) Démontrer que pour tout f dans E la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1^{(f)})$ où $g_1^{(f)}$ a été définie à la question 3.

b) Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et, pour $x>0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

6. Soit $f \in F$.

   a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

   b) **Théorème de la valeur initiale**
   On suppose de plus que f est de classe C^1 et croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

Dans la suite de l'exercice, f est un élément de E.

7. **Théorème de la valeur finale**
   On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel.

   a) Démontrer que f appartient à F.

   b) Démontrer, à l'aide du théorème de convergence dominée à paramètre continu, que $\lim\limits_{x\to 0} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

   c) Lorsque $\ell \neq 0$ déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

8. Dans cette question on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

9. Dans cette question on suppose seulement que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et on pose pour tout $x \geqslant 0$:

$$R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   a) Démontrer que pour tout $x>0$ réel on a $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

   b) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

10. **Une application : calcul de l'intégrale de Dirichlet**
   Ici f est la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ si $t \in]0,+\infty[$.

   a) Démontrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   b) Soit $x>0$. Démontrer que la fonction $t \mapsto (\sin t)\,\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

   c) Déterminer pour $x>0$ une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

11. **Injectivité de la transformation de Laplace**. Le but de cette question est de démontrer que $\mathcal{L} : E \to \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ est injective. On considère donc f dans E telle que $\mathcal{L}(f) = 0$.

   a) **Le théorème des moments**
   Soient $a<b$ des réels et $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout n entier naturel on ait : $\displaystyle\int_a^b t^n h(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Démontrer que $h=0$.

   b) Soit $g :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(-\ln t)$ si $t \in]0,1]$. On pose pour u dans $]0,1]$, $G(u) = \displaystyle\int_1^u g(s)\,\mathrm{d}s$.
   Démontrer que, pour tout $x>0$, on a $\displaystyle\int_0^1 u^{x-1} g(u)\,\mathrm{d}u = 0$ et conclure.

Remarque. Lorsqu'on ne peut trouver de domination, l'emploi du théorème 13 est impossible. On peut alors utiliser le théorème 4. Cela sera illustré dans l'exercice 29.

Exercice 29
Pour x réel on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que l'on a ainsi défini correctement une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser f'.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $g_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^n \frac{\cos xt}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

   a) Justifier que chaque g_n est de classe C^1.

b) Justifier que l'on définit correctement une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant pour tout x réel :

$$h(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

c) Démontrer que la suite (g_n') converge uniformément sur les compacts de $]0,+\infty[$ vers h.

d) En déduire que f' est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et précisez f'' sur cet intervalle.

3. Déterminer la fonction f. La fonction f' est-elle dérivable en 0 ?