Fonctions vectorielles

Table des matières

1 Définition 1

2 Développement limité à l'ordre 1 2

3 Propriétés 2

4 Illustrations fondamentales 3

1 Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$. Pour tout t dans I, $f(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et on écrit $f(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ où $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ sont les coordonnées du vecteur $f(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit ainsi n fonction $x_i : I \to \mathbb{R}$, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, où pour $t \in I$, $x_i(t)$ est la i-ème coordonnée du vecteur $f(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On dit que :

1. f est dérivable en $t_0 \in I$ lorsque chaque fonction x_i l'est. La dérivée de f en t_0 est alors :
$$f'(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0) = (x_1'(t_0), \ldots, x_n'(t_0)) \in \mathbb{R}^n$$
2. f est dérivable sur I lorsque chaque fonction x_i l'est.
3. f est de classe C^k sur I lorsque fonction x_i est de classe C^k sur ($k \geqslant 1$ entier)

Exemples et remarques

1. Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (cost, \sin t) \end{pmatrix}$. La fonction $\overrightarrow{u}$ est de classe C^∞, puisque ses composantes le sont, et on a :
$$u'(t) = \frac{du}{dt}(t) = (-\sin t, \cos t).$$
2. Avec les notations de la définition précédente, la dérivée de la fonction f en a se note $f'(a)$ ou $\frac{df}{dt}(a)$ et on a :
$$\frac{df}{dt}(a) = \big(\dot{x}_1(a), \ldots, \dot{x}_n(a)\big).$$
Ainsi, lorsque f est dérivable sur I , on a une nouvelle fonction :
$$f' = \frac{df}{dt} = \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & (\dot{x}_1(a), \ldots, \dot{x}_n(a)) \end{pmatrix}$$
qui est la fonction dérivée de f sur I.
3. Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (cost, \sin t) \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ t & \longmapsto & r(t) \end{pmatrix}$ et $\theta = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \theta(t) \end{pmatrix}$, que l'on suppose de classe C^∞.
On considère : $f = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (r(t)cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t)) \end{pmatrix}$.
Cette fonction f est de classe C^∞ par composante et on a (égalité de fonctions) :
$$\frac{df}{dt} = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta).$$

4. Avec les notations de la définition, si f est dérivable en $t_0 \in I$ alors f est continue en t_0. De plus si f est dérivable sur I alors f est constante si et seulement si $f' = 0$.
En effet on regarde ce qui se passe composante par composante.

Théorème 1
Lorsque $\lambda : I \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ sont dérivables sur l'intervalle I alors la fonction $\lambda f : t \mapsto \lambda(t) f(t) \in \mathbb{R}^n$ est dérivable sur I avec :

$$\big(\lambda f\big)' = \lambda' f + \lambda f'.$$

Démonstration. C'est une évidence en regardant composante par composante. $\square$

2 Développement limité à l'ordre 1

Théorème 2
Soient $t_0 \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f est dérivable en t_0.
(2) Il existe une fonction $\vec{\varepsilon} : I \to \mathbb{R}^n$ nulle et continue en t_0 et un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tels que pour tout $t \in I$ on ait l'égalité suivante dans $\mathbb{R}^n$:

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\vec{v} + |t - t_0|\, \vec{\varepsilon}(t).$$

Dans ce cas $f'(t_0) = \vec{v}$.

Démonstration.
• On suppose que f est dérivable en t_0. On écrit $f = (x_1, \ldots, x_n)$. Par définition, cela signifie que chacune des fonctions x_i est dérivable en t_0. Ainsi chacune des fonctions x_i admet en t_0 un développement limité à l'ordre 1 :

$$x_i(t) = x_i(t_0) = +(t - t_0)\dot{x}_i(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_i(t)$$

où $\varepsilon_i : I \to \mathbb{R}$ est une application nulle et continue en t_0.

On définit alors la fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^n$ en posant :

$$\varepsilon(t) = \big(\varepsilon_1(t_0), \ldots, \varepsilon_n(t_0)\big).$$

Tout marche alors comme sur des roulettes.

• On pose $\vec{v} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ (égalité de fonctions) et on remonte… $\square$

3 Propriétés

Théorème 3
Soit $t \in I$ intervalle de $\mathbb{R}$. Toute combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I est encore dérivable sur I (le même avec « de classe C^k » à la place de « dérivable »)

Démonstration. On regarde ce qui se passe composante par composante … $\square$

Théorème 4
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Alors la fonction $L \circ f : I \to \mathbb{R}^p$ est dérivable sur I avec : $(L \circ f)' = L \circ f'$

Démonstration. Soit $t_0 \in I$. Comme f est dérivable en t_0, il existe (voir 2) une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^n$, nulle et continue en t_0 tellle que pour tout $t \in I$ on ait :

$$f(t) == f(t_0) + (t - t_0) f'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t).$$

Pour tout t dans I on a alors :

$$L \circ f(t) = L \circ f(t_0) + (t - t_0) L \circ f'(t_0) + (t - t_0) L \circ \varepsilon(t).$$

Or $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire et $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie : L est continue. Ainsi :

$$\lim_{t \to t_0} L \circ \varepsilon(t) = L(0) = 0.$$

D'après le théorème 2, la fonction $L \circ f$ est dérivable en t_0 avec :

$$(L \circ f)'(t_0) = L \circ f'(t_0).$$

Ceci étant vrai pour tout $t_0 \in I$, on peut conclure ... $\square$

Théorème 5
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$, $g : I \to \mathbb{R}^p$ et $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire. Alors la fonction $B(f,g) : I \to \mathbb{R}^q$ est dérivable sur I avec :

$$\big(B(f,g)\big)' = B(f',g) + B(f,g')$$

Démonstration. Conformément au programme, on peut admettre ce résultat. $\square$

Remarque.

1. Il s'agit d'une généralisation de la formule $(uv)' = u'v + uv'$...

2. On peut montrer (par récurrence) que l'on a le même résultat en classe C^k avec (formule de Leibniz) :

$$\big(B(f,g)\big)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B\big(f^{(i)}, g^{(k-i)}\big)$$

Corollaire 5.1
Lorsque $f : I \to \mathbb{R}^n$, $g : I \to \mathbb{R}^n$ sont dérivables sur l'intervalle I alors la fonction $\langle f, g\rangle : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I avec :

$$\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle .$$

En particulier si $\varphi(t) = \|f(t)\|^2$ alors $\varphi' = 2\langle f, f'\rangle$.

Démonstration. C'est une application directe du théorème précédent, mais il est également possible de faire une démonstration indépendante, composante par composante $\square$

Corollaire 5.2
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}^2$, $g : I \to \mathbb{R}^2$ des fonctions dérivables sur I que l'on écrit $f = (f_1, f_2)$ et $g = (g_1, g_2)$ alors la fonction

$$\det(f,g) = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} : I \to \mathbb{R}$$

est dérivable sur I avec :

$$\big(\det(f,g)\big)' = \det(f',g) + \det(f,g').$$

Démonstration. C'est une application directe du théorème 5, mais il est également possible de faire une démonstration indépendante, composante par composante $\square$

4 Illustrations fondamentales

• Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable. On considère :

$$\varphi \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \|f(t)\|^2 \end{pmatrix}.$$

1. La fonction φ est dérivable sur I. En effet $\varphi = \langle f, f\rangle$ et ainsi, on peut utiliser le corollaire 5.1, puisque f est dérivable sur I. On a alors :

$$\varphi' = 2\langle f, f'\rangle .$$

Il est aussi possible d'écrire $f = (x_1, \ldots, x_n)$ et alors $\varphi = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ (égalité de fonctions). Par somme la fonction φ est dérivable et pour $t \in I$ on a :

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} 2\dot{x}_i(t)x_i(t).$$

2. Lorsque φ est constante (i.e. le vecteur $f(t)$ se déplace sur une sphère de $\mathbb{R}^n$ de rayon constant) alors $\varphi' = 0$ et ainsi, pour tout $t \in I$ les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

• Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable, qui ne s'annule pas. On considère :

$$\psi \left(\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \|f(t)\| \end{array} \right).$$

La fonction ψ est alors dérivable sur I et on a :

$$\varphi'(t) = \frac{\langle f(t), f'(t) \rangle}{\|f(t)\|}.$$

En effet $\psi = \sqrt{\varphi}$ où φ est la fonction de 1. Comme φ ne s'annule pas sur I, on a :

$$\psi' = \frac{\varphi'}{2\sqrt{\varphi}}.$$

Autre idée. On écrit $f = (x_1, \ldots, x_n)$ (égalité de fonctions) d'où

$$\psi(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)}$$

pour tout t dans I. Ainsi, par composition, la fonction ψ est dérivable puisque chaque fonction x_i l'est et on a :

$$\psi'(t) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2\dot{x}_i(t) x_i(t)}{2\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)}}.$$

• Soit $f = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\operatorname{sh} t, \arctan(2t)) \end{array} \right)$ et $g = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2, t) \end{array} \right)$.
Les fonction f et g sont de classe C^∞ par composantes. Ainsi $h = \langle f, g \rangle$ est aussi de classe C^∞. Or on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f'(t) & = \left(\operatorname{ch} t, \frac{2}{1+4t^2}\right) \\ g'(t) & = (0, 1) \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$ il vient :

$$\begin{aligned} h'(t) &= \langle f(t), g'(t) \rangle + \langle f'(t), g(t) \rangle \\ &= \arctan(2t) + \frac{2t}{1+4t^2} + 2\operatorname{ch} t \end{aligned}$$

• Plutôt que des applications à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ on peut considérer des applications à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Tout se passe de la même manière et on regarde ce qui se passe composante par composante.

Considérons $M = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & M(t) \end{array} \right)$, une application continue, ainsi qu'une application dérivable :

$$X = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & X(t) \end{array} \right).$$

On suppose que :

- — pour tout $t \in R$ on a $M(t) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (matrices antisymétriques) ;
- — il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $X(t_0) \in O_n(\mathbb{R})$;
- — pour tout t réel, $X'(t) = M(t)X(t)$.

Posons, pour tout t réel $g(t) = X(t)^{\mathrm{T}} X(t)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque ses composantes sont des sommes de produits de fonctions dérivables sur I. On a les égalités de fonctions :

$$\begin{aligned} g' &= (X^{\mathrm{T}})' X + X^{\mathrm{T}} X' = (X')^{\mathrm{T}} X + X^{\mathrm{T}} X' \\ &= (MX)^{\mathrm{T}} X + X^{\mathrm{T}} M X = X^{\mathrm{T}}(-M) X + X^{\mathrm{T}} M X' = 0 \end{aligned}$$

Ainsi g est constante donc, pour tout t réel, $g(t) = g(t_0) = I$ d'où $X(t) \in O_n(\mathbb{R})$.