

Résumé sur les équations différentielles

Table des matières

1 Équation différentielle linéaire du premier ordre	1
1.1 Résolution de l'équation linéaire homogène associée	1
1.2 Résolution finale	2
1.3 Recherche d'une solution particulière	2
1.4 La condition initiale	2
1.5 Compléments	2
2 Équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre	3
2.1 Résolution de l'équation homogène associée.	3
2.2 Trouver une solution particulière de l'équation complète. . .	3
2.3 La condition initiale	4
2.4 Complément	4

1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

On s'intéresse ici à l'équation différentielle

$$(E) \quad \alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t),$$

où α , β et γ sont des fonctions continues sur un intervalle J de $\mathbb{R}$.

Méthode de résolution

On veut résoudre (E) sur un intervalle I où la fonction α ne s'annule pas.

Etape 1. On se ramène à l'équation l'équation $(EC) \quad y' + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}y = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$ que l'on écrit sous la forme :

$$(EC) \quad y' + b(t)y = c(t)$$

On dit que cette équation est *résolue* en y' .

Etape 2. On résout l'équation linéaire homogène associée (EDLHA) à (EC) :

$$(EH) \quad y' + b(t)y = 0.$$

Etape 3. On cherche une solution particulière U de l'équation différentielle (EC) sur I .

Etape 4. Les solutions de l'équation différentielle (EC) sur I sont exactement les fonctions de la forme $f + U$ où f est une solution de (EH) .

1.1 Résolution de l'équation linéaire homogène associée

Les solutions sur I de

$$(EH) \quad y' + b(t)y = 0$$

sont exactement les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-B(t)}$ où B est une primitive de b sur I et λ un réel.

On dit que $t \mapsto \lambda e^{-B(t)}$ est la *solution générale* de (EH) sur I .

1.2 Résolution finale

Les solutions de (EC) sur I sont exactement les fonctions de la forme $f + U$ où U est une solution particulière de (EC) et f une solution de (EH) . Autrement dit les solutions de (EC) sur I sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{-B(t)} + U(t)$$

où λ est une constante réelle, B une primitive de b sur I et U est une solution particulière de (EC) .

1.3 Recherche d'une solution particulière

- On regarde d'abord s'il n'y a pas de solution particulière évidente.

- **La méthode de la variation de la constante**

La solution générale de l'équation homogène (EH) $y' + b(t)y = c(t)$ est $x \mapsto \lambda e^{-B(x)}$ où ...

On cherche alors une solution particulière de (EC) sous la forme

$$f : x \mapsto \lambda(x)e^{-B(x)}$$

où λ est cette fois une **fonction dérivable**.

Cela permet de déterminer λ' .

1.4 La condition initiale

- On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x),$$

où α , β et γ sont des fonctions dérivables sur un intervalle I .

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)

Lorsque α ne s'annule pas sur I , pour tout x_0 dans I et y_0 réel, **il existe une unique solution f de (E) tel que $f(x_0) = y_0$.**

- Interprétation graphique de ce résultat :

les graphes des solutions ne se coupent jamais !

1.5 Compléments

1. **Superposition des solutions.** Considérons les ED :

$$\begin{cases} (E_1) & \alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma_1(t) \\ (E_2) & \alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma_2(t) \end{cases}$$

Si f_1 est solution sur un intervalle J de (E_1) et si f_2 est solution sur J de (E_2) , alors la fonction $f_1 + f_2$ est solution sur J de

$$(E) \quad \alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma(t),$$

où $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

2. Pour l'équation homogène résolue (EH) $x' + a(t)x = 0$ on peut remarquer que :

- La somme de deux solutions est encore une solution (voir ci-dessus).
- Si f est solution alors λf est aussi solution pour tout réel (complexe...) λ .
- Toutes les solutions s'obtiennent en multipliant $f_0 : t \mapsto e^{-B(t)}$ par un réel (complexe...).

Autrement dit l'ensemble des solutions de (EH) sur I est **un espace vectoriel de dimension 1** : si on connaît une solution non nulle de (EH) alors on les connaît toutes.

3. **Retenir** : pour une équation différentielle linéaire du premier ordre, les solutions dépendent d'un paramètre λ qui correspond à la condition initiale de la solution.

2 Équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre

On s'intéresse ici à l'équation différentielle :

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = \gamma(t),$$

où a, b, c sont des **complexes** et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I .

Méthode de résolution

Pour la recherche de solutions à valeurs complexes ou réelles, la démarche est la suivante.

Etape 1. On résout l'équation différentielle homogène associée :

$$(EH) \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

Etape 2. On cherche une solution particulière U de (E) .

Etape 3. Les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme $f + U$ où f est une solution de (EH) .

2.1 Résolution de l'équation homogène associée.

On s'intéresse ici à l'équation

$$(EH) \quad ay'' + by' + cy = 0,$$

où a, b et c sont des complexes.

L'équation caractéristique associée à (EH) est :

$$(EQ) \quad ar^2 + br + c = 0$$

• Cas complexe.

1. Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 (éventuellement dans $\mathbb{C}$) alors les solutions de (EH) sur I à valeurs complexes sont exactement les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad \text{où } \lambda, \mu \text{ sont des complexes}$$

2. Si l'équation caractéristique admet une solution double r (éventuellement complexe) alors les solutions de (EH) sur I à valeurs complexes sont exactement les fonctions de la forme :

$$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{rt} \quad \text{où } \lambda, \mu \text{ sont des complexes}$$

• Cas réel.

1. Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles.}$$

2. Si l'équation caractéristique admet une seule racine réelle r alors les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{rt} \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles.}$$

3. Si l'équation caractéristique admet deux racines non réelles conjuguées $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \overline{z_1} = \alpha - i\beta$ alors les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos \beta t + \mu e^{\alpha t} \sin \beta t \quad \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes réelles.}$$

2.2 Trouver une solution particulière de l'équation complète.

On recherche d'abord une solution évidente. C'est facile lorsque le second membre $t \mapsto \gamma(t)$ est une fonction constante.

Second membre de la forme $\gamma(t) = \cos \omega t$ ou $\sin \omega t$.

- Si γ n'est pas solution de (EH) on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

- Si γ est pas solution de (EH) on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto t(A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

Lorsque le second membre sera de la forme $\gamma(t) = P(t)e^{mt}$ où P est un polynôme. La recherche d'une solution particulière dépend de la valeur de m .

- Si m n'est pas racine de l'équation résolvante on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto Q(t)e^{mt}$ où Q est un polynôme de même degré que P .
- Si m est **racine simple** de l'équation résolvante on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto tQ(t)e^{mt}$ où Q est un polynôme de même degré que P .
- Si m est **racine double** de l'équation résolvante on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto t^2Q(t)e^{mt}$ où Q est un polynôme de même degré que P .

2.3 La condition initiale

Théorème 2 (Cauchy-Lipschitz)

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = \gamma(t),$$

où a, b, c sont des **complexes** et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I .

Pour tout (t_0, x_0, v_0) dans $I \times \mathbb{C}^2$, il existe une unique solution f de

$$(E) \text{ sur } I \text{ tel que } \begin{cases} f(t_0) &= x_0 \\ f'(t_0) &= v_0 \end{cases}.$$

- Interprétation graphique de ce résultat :

les graphes de deux solutions différentes à valeurs réelles ne peuvent être « tangents ».

2.4 Complément

On considère l'équation différentielle

$$(EH) \quad ay'' + by' + cy = 0,$$

où a, b et c sont des complexes.

Alors l'ensemble de solutions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ de (EH) est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension deux.