Composition n° 5, une correction

Exercice 1

Supposons que l'équation différentielle (E) possède une solution développable en série entière sur $]-r;r[$ (avec $r>0$), notée $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. La fonction y est donc de classe C^∞ sur $]-r,r[$ et on a :

$$\begin{aligned}(x^2-x)y'(x) &= (x^2-x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x^2 y''(x) &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n.\end{aligned}$$

En sommant ces développements en série entière, il vient, pour tout $x \in]-r;r[$:

$$\begin{aligned}x^2y''(x)+(x^2-x)y'(x)+2y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left((n^2-2n+2)a_n + (n-1)a_{n-1}\right)x^n + 2a_0.\end{aligned}$$

Puisque y est solution de (E), on obtient **par unicité du développement en série entière** les relations

$$\begin{cases} 2a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ (n^2-2n+2)a_n + (n-1)a_{n-1} = 0\end{cases}$$

Puisque $n^2-2n+2 = 1+(n-1)^2 \neq 0$, il vient : $\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ a_n = \frac{1-n}{1+(n-1)^2}a_{n-1}\end{cases}$, ce qui entraîne la nullité de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une récurrence immédiate.
En conclusion, on a montré qu'une telle solution y est nécessairement la fonction nulle.
Il n'existe donc pas de solution non nulle de (E) qui soit développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 2

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

1. Par définition, T_1 correspond au rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
   Donc T_1 suit une loi géométrique de paramètre p, ce qui correspond au résultat attendu.
   De manière plus élémentaire, soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors :
   $$\{T_1 = k\} = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1}\{X_i = 0\}\right) \cap \{X_k = 1\}.$$
   Donc, par indépendance des variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$,
   $$\mathbb{P}(T_1 = k) = \left(\prod_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_i = 0)\right) \times \mathbb{P}(X_k = 1) = (1-p)^{k-1}\,p.$$
   Conclusion. $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}\,p.$

2. L'événement A est réalisé si et seulement si aucun des événements $\{T_1 = k\}$ n'est réalisé :

$$A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{\{T_1 = k\}} = \Omega \setminus \left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} \{T_1 = k\} \right).$$

Or, par σ-additivité de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P} \left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} \{T_1 = k\} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(T_1 = k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}\, p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Donc $\mathbb{P}(A) = 0$ et presque sûrement, un nouveau client doir arriver dans la file.

3. • Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $a_k = \mathbb{P}(T_1 = k) = p\,(1-p)^{k-1} > 0$. Alors :

$$\forall k \geqslant 1,\ \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - p \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - p\,.$$

Donc, par le critère de d'Alembert appliqué aux séries entières, $R = \frac{1}{1-p}$.

• Soit $t \in \left]-R, R\right[$. Alors

$$G_{T_1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} t^k = pt \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)t)^{k-1} = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

Finalement : $\forall t \in \left]-R, R\right[,\ G_{T_1}(t) = \frac{pt}{1+(p-1)t}$.

4. Comme $R > 1$, la fonction G_{T_1} est de classe $\mathcal{C}^2$ en 1, donc T_1 est de variance finie.
De plus, après calcul,

$$\forall t \in \left]-R, R\right[, G'_{T_1}(t) = \frac{p}{(1+(p-1)t)^2} \quad \text{et} \quad G''_{T_1}(t) = -\frac{2p(p-1)}{(1+(p-1)t)^3}\,.$$

On en déduit tout d'abord que $E(T_1) = G'_{T_1}(1) = \frac{1}{p}$.

De plus, par la formule de transfert,

$$G''_{T_1}(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\, \mathbb{P}(T_1 = k) = E(T_1(T_1 - 1)).$$

Cela entraîne, par la formule de Koenig-Huygens et par linéarité de l'espérance :

$$V(T_1) = E(T_1^2) - (E(T_1))^2 = G''_{T_1}(1) + E(T_1) - (E(T_1))^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\,.$$

Conclusion. $V(T_1) = \frac{1-p}{p^2}$.

5. Par linéarité de l'espérance,

$$E(D_n) = \sum_{k=1}^{n} E(T_k) = nE(T_1) = \frac{n}{p}\,.$$

De plus, comme les variables aléatoires (T_k) sont indépendantes (deux à deux),

$$V(D_n) = \sum_{k=1}^{n} V(T_k) = nV(T_1) = \frac{n(1-p)}{p^2}\,.$$

Enfin, par indépendance des variables (T_k),

$$\forall t \in \left]-R, R\right[, G_{D_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{T_k}(t) = G^n_{T_1}(t) = \left(\frac{pt}{1+(p-1)t} \right)^n.$$

6. Le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 est donné par :

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+1-k)}{k!}\, x^k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $t \in]-R, R[$. Alors, $|(p-1)t| < 1$ donc, par ce qui précède,

$$G_{D_n}(t) = p^n t^n (1+(p-1)t)^{-n} = p^n t^n \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (p-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, p^n (p-1)^k t^{n+k}$$

où $c_k = \dfrac{-n(-n-1)\dots(-n+1-k)}{k!} = (-1)^k \dbinom{k+n-1}{k}$.

Finalement, pour toutt $\in]-R, R[$:

$$G_{D_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} p^n (1-p)^k t^{n+k} = \sum_{j=n}^{+\infty} \binom{j-1}{j-n} p^n (1-p)^{j-n} t^j.$$

Alors, par unicité du développement en série entière, sachant que $P_{D_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(D_n = k) t^k$, pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\mathbb{P}(D_n = k) = \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n}$$

avec, par convention, $\binom{k-1}{k-n} = 0$ si $k < n$.

Partie II - Étude du comportement de la file

II.1 - Une suite récurrente

7. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(0) = \exp(-a) > 0$ et $f(1) = \exp(0) = 1$. On en déduit que :

$$\forall t \in]0,1[,\ f(t) \in]f(0), f(1)[\subset]0,1[.$$

Autrement dit, l'intervalle $]0,1[$ est stable par f.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition

$$(\mathcal{H}_n) :\ (z_n \in]0,1[\quad \text{et} \quad z_{n+1} - z_n \text{ est du même signe que } z_2 - z_1).$$

— Par hypothèse, $z_1 \in]0,1[$, donc $(\mathcal{H}_1)$ est vérifiée.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie.
Alors $z_n \in]0,1[$ donc par stabilité de $]0,1[$ par f, $z_{n+1} = f(z_n) \in]0,1[$.
De plus, par croissance de f, $z_{n+2} - z_{n+1} = f(z_{n+1}) - f(z_n)$ a même signe que $z_{n+1} - z_n$, donc $z_{n+2} - z_{n+1}$ a même signe que $z_2 - z_1$. Finalement, $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vérifiée.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \in]0,1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.

8. La suite (z_n) est une suite réelle monotone et bornée.
Donc, par le théorème de la limite monotone, (z_n) converge. On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} z_n$.
Par ce qui précède,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < z_n < 1$$

donc, par passage à la limite, $0 \leqslant \ell \leqslant 1$. De plus, par définition de (z_n),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = f(z_n).$$

Alors, par passage à la limite et par continuité de f, on obtient :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} z_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(z_n) = f(\ell).$$

Finalement, la suite (z_n) converge, et sa limite $\ell \in [0,1]$ est un point fixe de f.

9. Soit $x \in]0,1]$. Alors, par croissance de exp,

$$0 \leqslant \psi(x) \Leftrightarrow a(x-1) \leqslant \ln(x) \Leftrightarrow \exp(a(x-1)) \leqslant \exp(\ln(x) \Leftrightarrow f(x) \leqslant x$$

De même, par bijectivité de exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$,

$$\psi(x) = 0 \Leftrightarrow a(x-1) = \ln(x) \Leftrightarrow \exp(a(x-1)) = \exp(\ln(x) \Leftrightarrow f(x) = x$$

10. La fonction ψ est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1[\,,\ \psi'(x) = \frac{1}{x} - a > 1 - a \geqslant 0$.

   On en déduit que ψ est strictement croissante sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1]\,,\ \psi(x) \leqslant \psi(1) = 0$.
   De plus, comme ψ est strictement croissante sur $]0,1]$, ψ ne s'annule qu'en 1.
   Alors, d'après la question 9, $\forall x \in]0,1]\,,\ f(x) = x \Leftrightarrow \psi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Autrement dit, 1 est l'unique point fixe de f dans $]0,1]$, et donc dans $[0,1]$ car $f(0) \neq 0$. Alors, par la question 8, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 1$.

11. Sachant que $a > 1$, les variations de ψ sont aisée à établir.
   Alors $\psi(1/a) > 0$ et $\lim_{x\to 0} \psi(x) < 0$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]0,1/a[$ tel que $\psi(\alpha) = 0$. La stricte croissance de ψ sur $]0,1/a[$ assure l'unicité de α.
   Finalement, il existe $\alpha \in]0,1]$ tel que $\forall x \in]0,1],\ \psi(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \alpha$.
   La question 9 entraîne alors que

$$\forall x \in]0,1],\ f(x) = x \Leftrightarrow \psi(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ou } x = 1$$

   1er cas : $z_1 \in]0,\alpha]$. Par croissance de f,

$$\forall x \in]0,\alpha],\ f(x) \leqslant f(\alpha) = \alpha.$$

   On en déduit que $]0,\alpha]$ est stable par f et $\forall n \geqslant 1,\ z_n \leqslant \alpha$.
   Par passage à la limite, on en déduit que $\ell \leqslant \alpha$. Or α est l'unique point fixe de f sur $[0,\alpha]$.
   Donc, par la question 8, $\lim_{n\to+\infty} z_n = \alpha$.

   2ème cas : $z_1 \in]\alpha,1[$. De même, par stricte croissance de f, $\forall x \in]\alpha,1[\,,\ f(x) > f(\alpha) = \alpha$.
   Donc $]\alpha,1[$ est stable par f et $\forall n \geqslant 1,\ \alpha < z_n < 1$.
   De plus $\psi \geqslant 0$ sur $]\alpha,1]$ donc, par la question 9, $\forall x \in]\alpha,1],\ f(x) \leqslant x$.
   Cela entraîne que la suite (z_n) est décroissante, donc $\ell \leqslant z_1 < 1$ et, comme précédemment, $\ell = \alpha$.

   Finalement, dans les deux cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \alpha$.

II.2 - Groupes de clients

12. L'événement Z se réalise s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $V_n = 0$, c'est-à-dire si un groupe est passé au guichet sans qu'aucun nouveau client n'arrive entretemps. Donc l'événement Z correspond à la situation où à un moment donné, le guichet s'est libéré sans aucun nouveau client à servir.

13. La variable aléatoire N_n correspond au nombre de succès lors de la succession de n expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. Donc N_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,.$$

14. Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$. Par définition, V_1 est le nombre de clients arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1,S]\!]$. Donc, avec les notations précédentes, $V_1 = N_S$. On en déduit :

$$\mathbb{P}_{[S=n]}(V_1 = k) = \mathbb{P}(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

   Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, par la formule des probabilités totales, en utilisant le système complet d'événements $(\{S = n\})_{n\in\mathbb{N}}$, donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_1 = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(V_1 = k | S = n)\, \mathbb{P}(S = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= p^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} \qquad = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\, e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}\,.
\end{aligned}$$

Finalement, après simplification,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(V_1 = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\, e^{-\lambda}\, e^{(1-p)\lambda} = e^{-\lambda p}\, \frac{(\lambda p)^k}{k!}\,,$$

donc V_1 suit une loi de Poisson de paramètre λp.

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\{V_n = 0\} \subset \{V_{n+1} = 0\}$. Donc, par continuité croissante de $\mathbb{P}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\{V_n = 0\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{V_n = 0\}\right) = P(Z)\,.$$

Cela signifie que la suite (z_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = P(Z)$.

16. Soit $j \in \mathbb{N}$.
1er cas : $j = 0$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = 0\right) = 1 = \mathbb{P}(V_n = 0)^0$.

2ème cas : $j \geqslant 1$. Supposons que $V_1 = j$. Alors le premier groupe est composé des clients de 1 à j.
Par analogie avec les groupes de clients définis dans l'énoncé, pour tout client d'indice $1 \leqslant i \leqslant j$, on note $G_1^{(i)}$ l'ensemble des clients du deuxième groupe qui sont arrivés pendant que i est servi.
Puis, récursivement, pour tout $k \geqslant 2$, on note $G_k^{(i)}$ l'ensemble des clients du $(k+1)$-ième groupe arrivés pendant que les clients de $G_{k-1}^{(i)}$ sont servis.

Alors, par construction, le $(k+1)$-ième groupe est l'union disjointe des $(G_k^{(i)})_{1\leqslant i\leqslant j}$, donc

$$V_{k+1} = \sum_{i=1}^{j} V_k^{(i)}\,,$$

où $V_k^{(i)}$ représente le nombre de clients de $G_k^{(i)}$.
Or, pour tout i, la variable $V_k^{(i)}$ suit un processus identique à celui de la variable V_k en ne considérant que les temps de passage des clients appartenant aux groupes issus du client i.
On en déduit que $V_k^{(i)}$ suit la même loi que V_k et, faute de preuve rigoureuse, il est intuitivement raisonnable de considérer que les variables $\left(V_k^{(i)}\right)_{1\leqslant i\leqslant j}$ sont indépendantes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par positivité des variables $V_n^{(i)}$,

$$\{V_{n+1} = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n}\{V_n^{(i)} = 0\}$$

donc, par indépendance,

$$\mathbb{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = j\right) = \prod_{i=1}^{j} \mathbb{P}\left(V_n^{(i)} = 0\right) = \mathbb{P}(V_n = 0)^j.$$

Conclusion. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = j\right) = \mathbb{P}(V_n = 0)^j$.

17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par la formule des probabilités totales, en utilisant que $\left(\{V_1 = j\}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements,

$$z_{n+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = j\right)\, \mathbb{P}\left(V_1 = j\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(V_n = 0)^j e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^j}{j!} = e^{-\lambda p}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(\lambda p z_n)^j}{j!}\,.$$

Finalement, : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = e^{-\lambda p}\, e^{\lambda p z_n} = \exp(\lambda p(z_n - 1))$.

18. D'après la question précédente, la suite (z_n) vérifie toutes les hypothèses de la partie **II.1.** avec $a = \lambda p$.

Donc, d'après la question 10, si $\lambda p \leqslant 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 1$.

De plus, d'après la question 11, si $\lambda p > 1$, alors (z_n) converge vers un réel $\alpha < 1$.

Exercice 3

Partie I - Utilisation de séries entières

I.A - Une première formule

1. La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ a pour rayon de convergence 1.

   Notons f sa somme. Pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

2. Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.
   Donc la série entière $\sum n x^n$ a également pour rayon de convergence 1.
   De plus par propriété de dérivation des séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

   d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $n \geqslant k$ on a $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ et donc $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$.
   Donc la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dbinom{n}{k} x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\dfrac{1}{k!}\sum\limits_{n\geqslant 0} n^k x^n$, qui vaut 1 par k applications successives de la propriété rappelée ci-dessus.
   La dérivée k-ième de f est donnée pour $x \in]-1,1[$ par $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ (justification par récurrence sur k) et par ailleurs en dérivant k fois la série entière on obtient pour $x \in]-1,1[$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k} = k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

   et ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n \\
&= x^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} \\
&= \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) \\
&= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

   Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dbinom{n}{k} x^n$ et 1

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \tag{1}$$

I.B - Une seconde formule

4. Pour $x \neq 0$ fixé et $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \binom{2n}{n} |x^n| > 0$. On a alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!\,(n!)^2}{((n+1)!)^2\,(2n)!} |x| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4|x|$$

   On déduit alors du critère de d'Alembert que si $|x| < \dfrac{1}{4}$ alors la série de terme général u_n converge, et que si $|x| > \dfrac{1}{4}$ alors cette même série diverge. On en déduit que $R = \dfrac{1}{4}$.

Par développement en série entière de référence on a, pour tout x tel que $|4x| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (-4x)^n$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\frac{(2n)!}{2^n\,n!} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$
et ainsi, pour tout $x \in I = \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}(-4x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n$.

5. La fonction $x \mapsto \sqrt{1-4x}$ est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto \dfrac{-2}{\sqrt{1-4x}}$.

   On en déduit qu'une primitive sur I de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ est donnée par $x \mapsto -\dfrac{\sqrt{1-4x}}{2}$, et que la primitive qui s'annule en 0 est $x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$. Par primitivation d'une série entière, on en déduit que, pour tout $x \in I$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$ et après division par x, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \tag{2}$$

6. Les séries des deux questions précédentes ayant pour rayon de convergence $\dfrac{1}{4}$, la série entière obtenue par produit de Cauchy a un rayon de convergence au moins égal à $\dfrac{1}{4}$ et, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}x^n &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n\right)\\ &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\,\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\\ &= \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right).\end{aligned}$$

   Ainsi pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}x^n = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right)$.

7. Or, toujours d'après le développement en série entière de la question 4, pour $x \in I \setminus \{0\}$ on a

$$\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right) = \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n+2}{n+1}x^n$$

   Par unicité du développement en série entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} \tag{3}$$

II - Probabilités

II.A - Un conditionnement

8. Soit k un entier naturel et n un entier naturel non nul.

$$\mathbb{P}(X=n, Y=k) = \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}_{X=n}(Y=k) = p(1-p)^{n-1}e^{-n}\frac{n^k}{k!}$$

9. • D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X,

$$\mathbb{P}(Y=0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n,Y=0)=\sum_{n=1}^{+\infty}p(1-p)^{n-1}e^{-n}=\frac{pe^{-1}}{1-(1-p)e^{-1}}=\frac{p}{e-1+p}.$$

• Soit k un entier non nul.
D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X,

$$\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n,Y=k)=\sum_{n=1}^{+\infty}p(1-p)^{n-1}e^{-n}\frac{n^k}{k!}=\frac{p}{(1-p)k!}f_k\left(\frac{1-p}{e}\right)$$

10. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=k) &= \frac{p}{e-1+p}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{p}{(1-p)k!}f_k\left(\frac{1-p}{e}\right)=\frac{p}{e-1+p}+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{p}{(1-p)k!}n^k\left(\frac{1-p}{e}\right)^n\\
&= \frac{p}{e-1+p}+\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{p}{(1-p)k!}n^k\left(\frac{1-p}{e}\right)^n \quad \text{car ces sommes sont à termes positifs}\\
&= \frac{p}{e-1+p}+\frac{p}{(1-p)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}=\frac{p}{e-1+p}+\frac{p}{(1-p)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n(e^n-1)\\
&= \frac{p}{e-1+p}+\frac{p}{(1-p)}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n\right)\\
&= \frac{p}{e-1+p}+\frac{p}{(1-p)}\left(\frac{1}{1-(1-p)}-\frac{1}{1-\frac{1-p}{e}}\right)\\
&= \frac{p}{e-1+p}+\frac{p}{(1-p)}\cdot\frac{e-1+p-ep}{p(e-1+p)}=1
\end{aligned}$$

11. Comme Y prend des valeurs positives, déterminons $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(Y=k)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}k\mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{p}{(1-p)(k-1)!}f_k\left(\frac{1-p}{e}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{p}{(1-p)k!}n^{k+1}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{p}{(1-p)k!}n^{k+1}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n \quad \text{car ces sommes sont à termes positifs}\\
&= \frac{p}{(1-p)}\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1-p}{e}\right)^n\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}\\
&= \frac{p}{1-p}\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1-p}{e}\right)^n e^n=\frac{p}{1-p}\sum_{n=0}^{+\infty}n\,(1-p)^n=\frac{p}{1-p}\cdot\frac{1-p}{(1-(1-p))^2}\\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Donc Y admet une espérance et $E(Y)=\frac{1}{p}$.

12. Comme $Y(Y-1)$ prend des valeurs positives, déterminons $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)\mathbb{P}(Y=k)$.

Si la valeur de cette somme est finie alors $Y(Y-1)$ admet une espérance.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)(k-2)!} f_k\left(\frac{1-p}{e}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)k!} n^{k+2}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p}{(1-p)k!} n^{k+2}\left(\frac{1-p}{e}\right)^n \quad \text{car ces sommes sont à termes positifs} \\
&= \frac{p}{1-p}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\left(\frac{1-p}{e}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n^k}{k!} \frac{p}{1-p}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\left(\frac{1-p}{e}\right)^n e^n = \frac{p}{1-p}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 (1-p)^n \\
&= \frac{p}{1-p}\cdot\frac{(1-p)(1+(1-p))}{(1-(1-p))^3} = \frac{2-p}{p^2}
\end{aligned}$$

Donc $Y(Y-1)$ admet une espérance et $E(Y(Y-1)) = \frac{2-p}{p^2}$.
Alors Y admet un moment d'ordre 2 et $V(Y) = E(Y(Y-1) + E(Y) - E(Y)^2 = \frac{2-p}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$.
Ainsi Y admet une variance et $E(Y) = \frac{1}{p^2}$.

III.B - Pile ou face infini

13. On a $A_n = (X_1 + \ldots + X_{2n} = n)$.
Or $X_1 + \ldots + X_{2n}$ suit une loi binomiale de paramètre $(2n, p)$ par indépendance des X_i, donc

$$\mathbb{P}(A_n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

14. Soit n et k deux entiers distincts.
$B_n \cap B_k$ est l'événement « pour la première fois, il y a autant de piles que deux faces à l'issue des $2n$ et $2k$ lancers ». Il faudrait se décider au rang $2n$ ou $2k$, les deux en même temps n'est pas possible « pour la première fois ».
Ainsi $B_n \cap B_k = \emptyset$ ou encore B_n et B_k sont disjoints.

15. Pour qu'il y ait exactement autant de piles que de faces, il faut un nombre pair de lancers.
Donc $C = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$.

Alors par les événements étant disjoints, $\mathbb{P}(C) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

16. Remarquons que $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (B_k \cap A_n)$.
Or les événements $(B_1, \cdots, B_n)$ sont deux à deux disjoints et ainsi :

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_n \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(A_n)$$

Or pour out k dans $[\![1,k]\!]$, $\mathbb{P}_{B_k}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$ car sachant la première fois qu'il y a autant de piles que de faces est au $2k^{\text{ème}}$ lancer, pour qu'il y ait autant de piles que de faces est au $2n^{\text{ème}}$ lancer, il faut que les $2(n-k)$ lancers entre le $(2k+1)^{\text{ème}}$ lancer et le $2n^{\text{ème}}$ comporte autant de piles que de faces.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n-k})$.

17. Procédons par récurrence forte sur n.
— $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}((P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)) = 2pq = \frac{2}{1}\binom{1-1}{2-2}(p(1-p)^1$
— Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(B_k) = \dfrac{2}{k}\dbinom{2k-2}{k-1}\big(p(1-p)\big)^k$.

Alors d'après la question précédente, $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n+1-k})$.

Donc $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{1}{\mathbb{P}(A_0)}\left(\mathbb{P}(A_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n+1-k})\right)$.

D'après la question 13, $\mathbb{P}(A_n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$.

Donc $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \binom{2(n+1)}{n+1}(p(1-p))^{n+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) \binom{2(n+1-k)}{n+1-k} (p(1-p))^{n+1-k}$.

Et par hypothèse de récurrence,

$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \binom{2(n+1)}{n+1}(p(1-p))^{n+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}\big(p(1-p)\big)^k \binom{2(n+1-k)}{n+1-k}(p(1-p))^{n+1-k}$.

Ainsi $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \binom{2(n+1)}{n+1}(p(1-p))^{n+1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}\big(p(1-p)\big)^{n+1}$.

D'après l'égalité (I.3),

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \binom{2(n+1)}{n+1}(p(1-p))^{n+1} - \left(\binom{2n+2}{n+1} - \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}\binom{2n-2n}{n-n}\right)\big(p(1-p)\big)^{n+1}$$

Donc $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{2}{n+1}\dbinom{2(n+1)-2}{n+1-1}\big(p(1-p)\big)^{n+1}$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(B_n) = \dfrac{2}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n$.

18. D'après la question 15, $\mathbb{P}(C) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

    D'après la question précédente, $\mathbb{P}(C) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n$.

    Et par changement d'indice, $\mathbb{P}(C) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}\big(p(1-p)\big)^{n+1}$.

    Or $p \neq \frac{1}{2}$. Donc $p(1-p) \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$.

    Alors d'après la formule 2, $\mathbb{P}(C) = 2p(1-p)\frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)}}{2p(1-p)} = \mathbb{P}(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$.

19. D'après la formule de Stirling

$$\binom{2n}{n}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{e^{2n}}\frac{(e^n)^2}{(n^n\sqrt{2\pi n})^2}\frac{1}{n4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ n^{\frac{3}{2}}}$$

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge absolument, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n+1}$ converge absolument également.

Ainsi la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}$ converge normalement donc uniformément sur $\left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ et la fonction

$x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}$ est continue sur $\left[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

Il en résulte que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n+1} = 2$.

Or $\mathbb{P}(C) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 1$.