# Composition n° 4 bis, une correction

## Partie I - Étude de l'opérateur différence finie

1. Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}\Delta(P+Q) &= (P+Q)(X+1) - (P+Q)(X)\\ &= P(X+1) + Q(X+1) - P(X) - Q(X)\\ &= P(X+1) - P(X) + (Q(X+1) - Q(X))\\ &= \Delta(P) + \Delta(Q)\end{aligned}$$

Ayant même ensemble de départ et d'arrivée :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme.}}$$

2. $\boxed{\text{Si } \deg(P) \leqslant 0,\ \deg(\Delta(P)) = -\infty.}$

Si $n = \deg(P) \geqslant 1$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$\deg(\Delta(P)) \leqslant n$, le coefficient en $X^n$ de $\Delta(P)$ est nul et celui en $X^{n-1}$ est $na_n + a_{n-1} - a_{n-1} = na_n \neq 0$ donc $\deg(\Delta(P)) = n-1$.

$$\boxed{\text{Si } \deg(P) \geqslant 1,\ \deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1.}$$

3. • Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Par question 2 :

$$\forall P \in \mathbb{K}_d[X],\ \deg(\Delta(P)) \leqslant \deg(P) - 1 = d - 1 \leqslant d$$

donc $\Delta(\mathbb{K}_d[X]) \subset \mathbb{K}_d[X]$.

$$\boxed{\text{Pour tout } d \in \mathbb{N}^*,\ \Delta \text{ induit un endomorphisme sur } \mathbb{K}_d[X].}$$

4. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On a remarqué dans la question 2 que $\mathbb{K} \subset \ker(\Delta_d)$.
Pour tout $P \in \mathbb{K}_d[X] \setminus \mathbb{K}$, $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1 \geqslant 0$ donc $\Delta(P) \neq 0$.
Ainsi $\ker(\Delta_d) = \mathbb{K}$.

• $\Im(\Delta_d) = \text{vect}((\Delta(X^k))_{0 \leqslant k \leqslant n}) = \text{vect}((\Delta(X^k))_{1 \leqslant k \leqslant n})$ car $\Delta(1) = 0$. Pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, $\deg(\Delta(X^k)) = k-1$ donc la famille à degrés échelonnés $(\Delta(X^k))_{1 \leqslant k \leqslant d}$ est libre, de cardinal $d$ dans $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ de dimension $d$ donc $(\Delta(X^k))_{1 \leqslant k \leqslant d}$ est une base de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ et ainsi $\Im(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X]$.

$$\boxed{\text{Pour tout } d \in \mathbb{N}^*,\ \ker(\Delta_d) = \mathbb{K} \text{ et } \Im(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X].}$$

5. $\ker(\Delta) = \bigcup_{d \in \mathbb{N}^*} \ker(\Delta_d) = \mathbb{K}$ et $\Im(\Delta) = \bigcup_{d \in \mathbb{N}^*} \Im(\Delta_d) = \mathbb{K}[X]$.

$$\boxed{\ker(\Delta) = \mathbb{K} \text{ et } \Im(\Delta) = \mathbb{K}[X].}$$

Soit $h \in \mathbb{K}[X]$.
Par surjectivité de $\Delta$, il existe $P_h \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\Delta(P_h) = h$.
L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $(E_h)$ est alors

$$\Delta^{-1}(h) = P_h + \ker(\Delta) = P_h + \mathbb{K}.$$

Si $h$ est une fonction polynomiale, l'ensemble des solutions **polynomiales** de $(E_h)$ est une droite affine dirigée par 1. Pour obtenir toutes les solutions, on ajoutera les fonctions 1-périodiques.

6. On remarque que $C_2 = \dfrac{X(X-1)}{2}$ vérifie $\Delta(C_2) = X$. Par 5 :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions polynomiales de } (E_h), \text{ où } h : x \mapsto x, \text{ est } \frac{X(X-1)}{2} + \mathbb{K}.}$$

7. Par question 2, on montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \deg(\Delta^n(P)) \leqslant \deg(P) - n.$$

Ainsi $\Delta_d^{d+1} = 0$.

$$\boxed{X^{d+1} \text{ annule } \Delta_d.}$$

$\Delta_d(X) = 1 \neq 0$ donc $\Delta_d$ nilpotent non nul ne peut être diagonalisable.

$$\boxed{\Delta_d \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

## Partie II - Fonctions entières

### Généralités

1. Voir dans son cours préféré.
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, $|a_n\omega(t)^n\omega(t)^{-k}| \leqslant |a_n|$ or le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est infini donc $\sum |a_n|$ converge. Ainsi $\sum\limits_n a_n\omega^n\omega^{-k}$ converge normalement sur $[0,1]$ et :

$$\int_0^1 f(\omega(t))\omega^{-k}(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 \omega(t)^{n-k}dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = k$, $\displaystyle\int_0^1 \omega(t)^{n-k}dt = 1$ ; si $n \neq k$, $\displaystyle\int_0^1 \omega(t)^{n-k}dt = \left[\frac{e^{2i\pi(n-k)t}}{2i\pi(n-k)}\right]_0^1 = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{Z}, \int_0^1 f(\omega(t))\omega^{-k}(t)dt = \begin{cases} a_k \text{ si } k \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}}$$

### Une intégrale

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. $e^z = 1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2i\pi k$.
Or $2i\pi\mathbb{Z} \cap S^1 = \emptyset$ donc $t \mapsto e^{\omega(t)} - 1$ ne s'annule pas sur $[0,1]$.
Ainsi pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto \dfrac{\omega(t)^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{Z}, I_p \text{ est bien définie.}}$$

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{\frac{|z|^{n-1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^{n-2}}{n!}} = \dfrac{|z|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc de la règle de d'Alembert,

$$\beta : z \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} \in \mathcal{E}.$$

Du développement en série entière de l'exponentielle, on a bien :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z - 1 = z(1 + z\beta(z)).$$

Enfin pour tout $\zeta \in S^1$ : $|\beta(\zeta)| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}$.

$$\forall \zeta \in S^1,\ |\beta(\zeta)| \leqslant e - 2 \in ]0,1[.$$

$$\boxed{\text{Il existe } \beta \in \mathcal{E} \text{ et } C \in ]0,1[ \text{ tels que : } \forall \zeta \in S^1, \begin{cases} e^{\zeta} - 1 = \zeta(1 + \zeta\beta(\zeta)), \\ |\beta(\zeta)| \leqslant C \end{cases}}$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\frac{1}{1+z} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j z^j$.

   Soit $\zeta \in S^1$ et $p \in \mathbb{Z}$. Par question 10, $|\zeta\beta(\zeta)| < 1$ donc :

$$\frac{\zeta^p}{e^{\zeta} - 1} = \zeta^{p-1} \frac{1}{1 + \zeta\beta(\zeta)} = \zeta^{p-1} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j (\zeta\beta(\zeta))^j.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \zeta \in S^1 \text{ et tout } p \in \mathbb{Z},\ \frac{\zeta^p}{e^{\zeta} - 1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \zeta^{j+p-1} \beta(\zeta)^j.}$$

4. Soit $p \in \mathbb{Z}$. $\omega$ est à valeurs dans $S^1$ donc par question 11 :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |(-1)^n \omega(t)^{n+p} \beta(\omega(t))^n| \leqslant C^n.$$

   Or $C \in ]0,1[$ donc la série $\sum_n C^n$ converge et ainsi $\sum_n (-1)^n \omega^{n+p} \beta(\omega)^n$ converge normalement sur $[0,1]$ vers $\frac{\omega^{p+1}}{e^{\omega} - 1}$ de sorte que :

$$I_p = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 \beta(\omega(t))^n \omega(t)^{n+p} dt$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta^n \in \mathcal{E}$ : on applique donc la question 9. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ : si $n \geqslant 1$ ou $p \geqslant 1$ alors $-(n+p) \notin \mathbb{N}$ donc $\int_0^1 \beta(\omega(t))^n \omega(t)^{n+p} = 0$ ;

   si $n = p = 0$, $\int_0^1 \beta(\omega(t))^n \omega(t)^{n+p} = 1$. On conclut.

$$\boxed{I_0 = 1 \text{ et pour tout } p \in \mathbb{N}^*,\ I_p = 0.}$$

## Partie III - Polynômes de Bernoulli

### Lien avec l'équation $(E_h)$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$.

   Comme mentionné dans la question 10, $t \mapsto \frac{\omega(t)^{1-n}}{e^{\omega(t)} - 1}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc y est bornée. Il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall t \in [0,1],\ \left| \frac{1}{(e^{\omega(t)} - 1)\omega(t)^{n-1}} \right| \leqslant M.$$

   Ainsi : $\forall t \in [0,1], \forall k \in \mathbb{N},\ \left| \frac{z^k \omega(t)^k}{k!(e^{\omega(t)} - 1)\omega(t)^{n-1}} \right| \leqslant \frac{|z|^k}{k!}$.

Or la série $\sum_k \frac{|z|^k}{k!}$ converge donc $\sum_k \frac{z^k\omega^k}{k!(\mathrm{e}^\omega-1)\omega^{n-1}}$ converge normalement sur $[0,1]$ vers $\frac{\mathrm{e}^{z\omega}}{(\mathrm{e}^\omega-1)\omega^{n-1}}$ et par conséquent :

$$B_n(z)=n!\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}I_{k-n}.$$

Or pour tout entier $k>n$, $k-n\in\mathbb{N}^*$ donc $I_{k-n}=0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N} \text{ et tout } z\in\mathbb{C},\ B_n(z)=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}I_{n-k}.}$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. De l'expression trouvée, $B_n\in\mathbb{R}_n[X]$ et le coefficient en $X^n$ de $B_n$ est $n!\frac{1}{n!}I_0=1$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ B_n \text{ est unitaire de degré } n.}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$B_n'=n!\sum_{k=1}^{n}\frac{kX^{k-1}}{k!}I_{n-k}=n!\sum_{k=1}^{n}\frac{X^{k-1}}{(k-1)!}I_{n-k}=n(n-1)!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{X^i}{i!}I_{n-1-i} \text{ en posant } i=k-1.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ B_n'=nB_{n-1}.}$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $z\in\mathbb{C}$.

$f:s\mapsto \mathrm{e}^{zs}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}s^k\in\mathcal{E}$ et $n-1\in\mathbb{N}$ donc par question 9 :

$$B_n(z+1)-B_n(z)=n!\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{(z+1)\omega(t)}-\mathrm{e}^{z\omega(t)}}{(\mathrm{e}^{\omega(t)}-1)\omega(t)^{n-1}}dt=n!\int_0^1 f(\omega(t))\omega(t)^{-(n-1)}dt=n!\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}=nz^{n-1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^* \text{ et tout } z\in\mathbb{C},\ B_n(z+1)-B_n(z)=nz^{n-1}.}$$

4. Par question 16, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\frac{B_{k+1}}{k+1}$ est un antécédent de $X^k$ par $\Delta$ donc par linéarité de $\Delta$ :

$$\boxed{\text{Pour tout } h=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{C}[X],\ \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}B_{k+1} \text{ est une solution polynomiale de } (E_h).}$$

### Unicité

1. Existence : il est clair que $B_0=1$ (unitaire de degré 0) et on a déjà montré que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $B_n'=nB_{n-1}$. Enfin pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$\int_0^1 B_n(t)dt=\frac{1}{n+1}\int_0^1 B_{n+1}'(t)dt=\frac{B_{n+1}(1)-B_{n+1}(0)}{n+1}=0^n=0.$$

Unicité : il suffit de montrer que l'application linéaire $f:\mathbb{C}[X]\to\mathbb{C}[X]\times\mathbb{C}$ qui à $Q\in\mathbb{C}[X]$ associe $\left(Q',\int_0^1 Q(t)dt\right)$ est injective pour conclure.

Soit $Q\in\mathbb{C}[X]$ telle que $Q'=0$ et $\int_0^1 Q(t)dt=0$.

Il existe $z\in\mathbb{C}$ tel que $Q=z$ et $0=\int_0^1 Q(t)dt=z$ donc $Q=0$.

$\ker(f)=\{0\}$ d'où l'injectivité de $f$.

$$\boxed{(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est l'unique suite de } \mathbb{C}[X] \text{ telle que } B_0=1 \text{ et pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ \begin{cases}B_n'=nB_{n-1}\\ \int_0^1 B_n(t)dt=0.\end{cases}}$$

2. $H_0 = (-1)^0 B_0(1-X) = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$H_n' = (-1)^n(-B_n'(1-X)) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1-X) = nH_{n-1}.$$

$\displaystyle\int_0^1 H_n(t)dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(u)du = 0$ en posant $u = 1-t$.
Par question 18 :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ H_n = B_n.}$$

## Une application analytique

1. Tout d'abord, la fonction $\psi$ ne s'annule jamais et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{\psi(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

Comme $\dfrac{1}{\psi}$ est développable en série entière, de rayon de convergence infini, sa somme est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (l'intervalle ouvert de convergence). Par passage à l'inverse, la fonction $\psi$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction $(x,t) \mapsto x$ est de classe $C^\infty$ car polynomiale, donc par composition :

$$(x,t) \mapsto \psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

La fonction $(x,t) \mapsto tx$ est également de classe $C^\infty$ car polynomiale donc, par composition :

$$(x,t) \mapsto \mathrm{e}^{tx} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

On conclut par produit :

$$\boxed{u : (x,t) \mapsto \psi(x)\mathrm{e}^{tx} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).}$$

2. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \psi(x)x\mathrm{e}^{tx} = xu(x,y).}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Du théorème de Schwarz, $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = \dfrac{\partial^n}{\partial x^n}\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$.
De la formule de Leibniz, les fonctions $p : (x,t) \mapsto x$ et $u$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ :

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^n (pu)}{\partial x^n}(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^k p}{\partial x^k}(x,t)\frac{\partial^{n-k} u}{\partial x^{n-k}}(x,t) = \binom{n}{0} p(x,t)\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + \binom{n}{1}\frac{\partial p}{\partial x}(x,t)\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t$$

$$\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) = x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + n\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}(x,t).}$$

3. On a $A_0 : t \mapsto u(0,t) = \psi(0) = 1$.
Par question 21, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n' = nA_{n-1}$.
Pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 u(x,t)dt = \psi(x)(e^x - 1) = x$ (l'égalité est bien valable pour $x$ nul).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto u(x,t)$ est de classe $C^n$ sur $[0,1]$ et pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$ et tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc intégrable.
Enfin pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$ est continue sur le compact $[0,1]^2$ donc il existe $M_k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in [0,1]$ : $\forall t \in [0,1]$, $\left|\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant M_k$ et $t \mapsto M_k$ est intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi $I : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 u(x,t)dt = x$ est de classe $C^n$ sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 = I^{(n)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t)dt$$

En particulier en évaluant en $0$ : $0 = \displaystyle\int_0^1 A_n(t)dt$.

$A_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n' = nA_{n-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 A_n(t)dt = 0$ donc par question 18 (de la relation de récurrence, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est polynomiale) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = B_n.}$$

## Partie IV - Solution entière de l'équation $(E_h)$

### Une inégalité de contrôle

1. On suppose par l'absurde que :

$$\forall c > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{C},\ |z| = (2n+1)\pi \text{ et } |e^z - 1| < c.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. $2^{-p} > 0$ donc il existe $n_p \in \mathbb{N}$ et $z_p \in \mathbb{C}$ tels que

$$|z_p| = (2n_p+1)\pi \text{ et } |\mathrm{e}^{z_p} - 1| \leqslant 2^{-p}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|\mathrm{e}^{z_p} - 1| \leqslant 2^{-p}$ et $2^{-p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc par encadrement :

$$\mathrm{e}^{z_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1.$$

$$\boxed{\text{Il existe } (n_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ et } (z_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ telles que } \begin{cases} \forall p \in \mathbb{N},\ |z_p| = (2n_p+1)\pi, \\ \mathrm{e}^{z_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1. \end{cases}}$$

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|\mathrm{e}^{a_p} - 1| = ||\mathrm{e}^{z_p}| - |1|| \leqslant |\mathrm{e}^{z_p} - 1|$ or $|\mathrm{e}^{z_p} - 1| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc par encadrement : $\mathrm{e}^{a_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$. Par continuité du logarithme en 1 :

$$\boxed{a_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $||z_p| - |b_p|| = ||z_p| - |ib_p|| \leqslant |z_p - ib_p| = |a_p|$ or $a_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc par encadrement :

$$\boxed{|z_p| - |b_p| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.}$$

3. D'une part $\mathrm{e}^{z_p - i\epsilon_p|z_p|} = \mathrm{e}^{z_p}\mathrm{e}^{-i\epsilon_p(2n_p+1)\pi} = -\mathrm{e}^{z_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} -1$ par 23.

D'autre part $\mathrm{e}^{z_p - i\epsilon_p|z_p|} = \mathrm{e}^{a_p + i\epsilon_p(|b_p| - |z_p|)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} e^0 = 1$ par question 24 et continuité de l'exponentielle en 0.

Par unicité de la limite $1 = -1$. Absurde !

**Conclusion.** $\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C},\ |z| = (2n+1)\pi \Rightarrow |e^z - 1| \geqslant c.$

**Une solution à** $(E_h)$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

   Par question 25, tout $t \in [0,1]$, $|\mathrm{e}^{\gamma_n(t)}-1| \geqslant c > 0$ et $\gamma_n$ ne s'annule pas donc $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{z\gamma_n(t)}}{(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)}-1)\gamma_n(t)^{n-1}}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient bien défini de fonctions qui le sont. Ainsi $Q_n(z)$ est bien défini.

   Pour tout $t \in [0,1]$, et tout $k \in \mathbb{N}$ $\left|\dfrac{z^k\gamma_n(t)^k}{k!(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)}-1)\gamma_n(t)^{n-1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{c_n}\dfrac{|(2n+1)\pi z|^k}{k!}$ où $c_n = c((2n+1)\pi)^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|(2n+1)\pi z|^k}{k!} = \mathrm{e}^{|(2n+1)\pi z|} < +\infty$ donc $\displaystyle\sum_k \frac{z^k\gamma_n^k}{k!(\mathrm{e}^{\gamma_n}-1)\gamma_n^{n-1}}$ converge normalement vers $\dfrac{\mathrm{e}^{z\gamma_n}}{(\mathrm{e}^{\gamma_n}-1)\gamma_n^{n-1}}$ sur $[0,1]$ et ainsi $Q_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q_{n,k}z^k$ en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $q_{n,k} = n!\displaystyle\int_0^1 \frac{\gamma_n(t)^k}{(\mathrm{e}^{\gamma_n(t)}-1)\gamma_n(t)^{n-1}}dt$.

   Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} q_{n,k}z^k$ converge vers $Q_n(z)$ donc $Q_n \in \mathcal{E}$.

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n \in \mathcal{E}.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.

   $f_n : s \mapsto \mathrm{e}^{z(2n+1)\pi s} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z(2n+1)\pi)^k}{k!}s^k \in \mathcal{E}$ et $n-1 \in \mathbb{N}$ donc par 9 :

   $$\begin{aligned} Q_n(z+1)-Q_n(z) &= \frac{n!}{((2n+1)\pi)^{n-1}}\int_0^1 f_n(\omega(t))\omega(t)^{-(n-1)}dt \\ &= \frac{n!}{((2n+1)\pi)^{n-1}}\frac{(z(2n+1)\pi)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= nz^{n-1}. \end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } z \in \mathbb{C},\ Q_n(z+1)-Q_n(z) = nz^{n-1}.}$$

3. On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| \leqslant \mathrm{e}^{|z|}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Intégrant dans le sens des bornes croissantes :

   $$|Q_n(z)| \leqslant n!\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{|z(2n+1)\pi|}}{c((2n+1)\pi)^{n-1}}dt \leqslant u_n\mathrm{e}^{bn|z|}$$

   où $b = 3\pi > 0$ et $u_n = \dfrac{n!}{c((2n+1)\pi)^{n-1}} = \dfrac{1}{c}\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{(2n+1)\pi} \leqslant \frac{1}{c}$.

   Ainsi $a = \dfrac{1}{c} > 0$ convient.

   $$\boxed{\text{Il existe } (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, |Q_n(z)| \leqslant a\mathrm{e}^{bn|z|}.}$$

4. Soit $h \in \mathcal{E}$ de développement en série entière $\sum h_n z^n$ et $H$ l'élément de $\mathcal{E}$ de développement $\sum |h_n|z^n$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\displaystyle\sum_k q_{n,k}z^k$ le développement en série entière de $Q_n$.

   Soit $z \in \mathbb{C}$ et $r = |z|+1$.

   Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. $Q_n(r\cdot) \in \mathcal{E}$ donc par 9, $q_{n,k}r^k = \displaystyle\int_0^1 Q_n(r\omega(t))\omega(t)^{-k}dt$ puis par 28, $|q_{n,k}r^k| \leqslant a\mathrm{e}^{bnr}$.

$$\forall (n,k)\in \mathbb{N}^2,\ \ |q_{n,k}|\leqslant a\frac{\mathrm{e}^{bnr}}{r^k}.$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n,k\geqslant 0}\left|\frac{q_{n+1,k}}{n+1}h_n z^k\right|\leqslant a\mathrm{e}^{br}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}|h_n|(\mathrm{e}^{br})^n\left(\frac{|z|}{r}\right)^k = a\mathrm{e}^{br}\frac{H(\mathrm{e}^{br})}{1-\frac{|z|}{r}}<+\infty$ car $\displaystyle\frac{|z|}{r}\in ]0,1[$.

La famille $\displaystyle\left(\frac{q_{n+1,k}}{n+1}h_n z^k\right)$ est sommable donc en posant pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\displaystyle a_k=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q_{n+1,k}}{n+1}h_n\in\mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}a_k z^k=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{h_n}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}q_{n+1,k}z^k=\sum_{n=0}^{+\infty}h_n\frac{Q_{n+1}(z)}{n+1}.$$

Ainsi l'application $\displaystyle f=\sum_{n=0}^{+\infty}h_n\frac{Q_{n+1}}{n+1}$ est bien définie, appartient à $\mathcal{E}$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$, par 27 :

$$f(z+1)-f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}h_n\frac{Q_{n+1}(z+1)-Q_{n+1}(z)}{n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}h_n z^n=h(z).$$

$$\boxed{\text{Pour tout } h\in\mathcal{E},\ (E_h) \text{ admet une solution dans } \mathcal{E}.}$$