

Composition n° 4, Le samedi 18 janvier 2025

Exercice 1**Partie I - Déplacement aléatoire sur un tétraèdre**

On s'intéresse au déplacement aléatoire d'un point mobile sur les arêtes d'un tétraèdre dont les sommets sont numérotés de 1 à 4 : voir figure 1. Lorsque le point est sur un des sommets, il a la même probabilité de se rendre sur chacun des trois autres sommets du graphe.

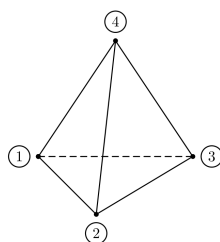
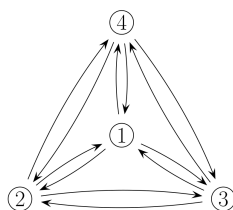


FIGURE 1 – Tétraèdre

Le graphe probabiliste de la situation est donnée figure 2, où les quatre sommets du tétraèdre sont représentées par les étiquettes numérotées.

FIGURE 2 – Graphe probabiliste : toutes les flèches sont pondérées par $\frac{1}{3}$ **Notations**

- On pose : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire qui associe le numéro du sommet sur lequel se trouve le mobile à l'instant n et on pose :
 - $a_n = P(X_n = 1)$;
 - $b_n = P(X_n = 2)$;
 - $c_n = P(X_n = 3)$;
 - $d_n = P(X_n = 4)$.
 - On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n le vecteur ligne $L_n = (a_n \quad b_n \quad c_n \quad d_n)$.
1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$.
 2. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
Déterminer l'expression de J^k en fonction de la matrice J .

3. Justifier que la matrice de transition associée au graphe probabiliste de la figure 2 est :

$$T = \frac{1}{3}(J - I).$$

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $L_{n+1} = L_n T$.

5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $L_n = L_0 T^n$.

6. La matrice T est-elle diagonalisable ?

7. **Réduction de la matrice T .**

a) Quel est le rang de la matrice $T + \frac{1}{3}I$?

En déduire une valeur propre de T et la dimension du sous-espace propre associé.

b) On considère le vecteur colonne $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer TU .

c) Déterminer une matrice diagonale $D \in M_4(\mathbb{R})$ et une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, inversible, telles que : $T = PDP^{-1}$.

On ne demande pas la matrice P^{-1} .

8. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $T^n = PD^n P^{-1}$.

9. a) Déterminer un polynôme annulateur de la matrice T .

b) En déduire, selon l'entier naturel n , l'expression de T^n .

10. a) Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Interpréter les résultats obtenus à la question 10a.

Partie II - Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

1. Montrer que pour tout réel x on a $1 - x \leq e^{-x}$

2. On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(A_i)$ diverge. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geq k$, on note

$$C_n = \bigcup_{k \leq i \leq n} A_i = A_k \cup \dots \cup A_n$$

a. Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k}^n P(A_i) = +\infty$

b. Montrer que $P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^n P(\overline{A_i})$ puis que $P(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right)$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = 1$

c. Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1} . Que peut-on en déduire pour $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right)$?

d. Justifier que $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$ et en déduire que : $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$.

3. En considérant les événements A_n « on obtient Pile au $(2n)$ -ième et au $(2n+1)$ -ième lancers », montrer que la probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs est égale à 1.

Exercice 2

Partie I - Un calcul d'intégrale

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $f(t) = \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}}$.

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $t \mapsto te^{-kt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} te^{-kt} dt = \frac{1}{k^2}.$$

2. Démontrer que la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$ puis, à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$.

Partie II - La fonction zêta

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et x réel on pose : $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On note D_ζ son ensemble de définition.

3. Déterminer D_ζ .
4. La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?
5. Montrer que ζ est continue sur D_ζ .
6. Montrer que ζ est de classe C^1 sur D_ζ et déterminer la fonction ζ' à l'aide d'une somme d'une série.
7. Déterminer, si elle existe, la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
8. Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.
 - a) Montrer : $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$.
 - b) En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$, on a :

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

- c) Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
9. Donner l'allure du graphe de la fonction ζ .

Partie III - Étude d'une fonction définie par une somme

Dans cette partie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$ réel, on pose : $f_n(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}$.

10. Montrer que la série de fonction $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On note alors, pour $x \in [0, +\infty[$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right)$

11. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et étudier ses variations.
12. Montrer que f est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ et calculer $f^{(k)}(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$.
13. Déterminer pour quels $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{t^x - 1}{1-t} dt$ est convergente
14. Démontrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{1-t} dt$:

Exercice 3 - L'équivalent de Stirling

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Pour tout $x > 0$, on note :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

3. On admet que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et qu'elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$\text{Montrer que pour tout } n \in \mathbb{N} : \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$$

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\rho_k = \ln k - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln \Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k.$$

On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} (2 \ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t)) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt.$$

6. En déduire que $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

7. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$\ln \Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln n - n + c + o(1).$$

En déduire que lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$\Gamma(n) \sim e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

8. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0, n]$ et on note :

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du.$$

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x > 0, \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

10. On définit la fonction $\mathbb{1}_{]0, n[}$ sur $\mathbb{R}_+$ en posant $\mathbb{1}_{]0, n[}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0, n[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

En remarquant que $\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]0, n[}(t) t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$, utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x).$$

En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

11. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. En déduire que $e^c = \sqrt{2\pi}$ où c est défini à la question 7. On pourra faire appel aux résultats des questions 1 et 2.