Composition n° 2, bis. Une correction

Exercice - Calcul d'une intégrale impropre

1. La fonction $\phi : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\phi(u) \underset{0^+}{\sim} u^{-1/2}$ et $\phi(u) = \mathrm{o}\left(u^2\right)$ en $+\infty$; donc K converge.
2. - La fonction $f_x : u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x \geqslant 0$;
   - pour $x = 0$, $f_0(u) \underset{0^+}{\sim} u^{-3/2}$ d'intégrale divergente ;
   - pour $x > 0$, $f_x(u) \underset{0^+}{\sim} \frac{\phi(u)}{x}$ d'intégrale convergente, $f_x(u) = \mathrm{o}\left(u^2\right)$ en $+\infty$, donc $F(x)$ converge.

   Ainsi et $D = \mathbb{R}_+^*$.
3. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f_x(u)$ décroissante, donc F aussi.
4. La fonction G est dérivable sur D et pour tout $x \in D$, d'après la relation admise,
$$G'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{x}}\,F(x) - \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x) + \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\left[x\,F'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x)\right] = -K\,\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$
   Les fonctions G et $H : x \mapsto -K \displaystyle\int_0^x \phi(u)\,\mathrm{d}u$ (bien définie car ϕ a une intégrale convergente en 0^+) ont la même dérivée sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc y diffèrent d'une constante.
5. La fonction F est décroissante, positive et a une limite finie en $+\infty$, donc $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.

   D'autre part, par convergence de K, $G(x) = C - K \displaystyle\int_0^x \phi(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to+\infty]{} C - K^2$; d'où $C = K^2$.
6. (a) Le changement de variables $t \mapsto \sqrt{t} = u$ est de classe C^1 bijectif de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. L'intégrale demandée et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \pi$ sont de même nature et égales. Donc $J = \pi$.

   (b) Par changement de variables $u \mapsto u/x = t$ (pour $x > 0$) on obtient
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t$$
   donc l'intégrale converge.

   (c) Soit $\epsilon > 0$. Par convergence de J, il existe $A > 0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,(t+1)} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.

   Par continuité de exp en 0,
$$\exists \eta > 0\,,\ \forall u \in \mathbb{R}\,,\quad 0 \leqslant u \leqslant \eta \Rightarrow \left|\mathrm{e}^{-u} - 1\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2\pi}$$
   Alors, pour tout $x \in [0, \eta/A]$,
$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t \ - J\right| \leqslant \int_0^A \frac{\left|\mathrm{e}^{-tx} - 1\right|}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,(t+1)} \leqslant \frac{\epsilon}{2\pi}\,J + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$
   d'où la différence des intégrales tend vers 0 quand x tend vers 0^+.

   (d) D'après la question 6c
$$G(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} J$$
   D'autre part, $\lim\limits_{0^+} G = C$ car l'intégrale de ϕ converge en 0 ; d'où $C = \pi$.
7. D'après la question 5, $K = \sqrt{C} = \sqrt{\pi}$.

Problème - Autour de l'exponentielle de matrices

Partie I - Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. • Tout d'abord $\| \ \| : A = [a_{i,j}] \mapsto \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

   • Puis soient $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   ∗ Si $\|A\| = 0$ alors $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right) = 0$ donc pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = 0$ et ainsi pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ on a $|a_{i,j}| = 0$ ce qui signifie que $A = 0$.

   ∗ $\|\lambda A\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{i,j}| \right) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda|\,|a_{i,j}| \right) = \|\lambda\| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right) = \|\lambda\|\,\|A\|$.

   ∗ On a $A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]$ donc pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \right) \\ &\leqslant \underbrace{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)}_{=\|A\|} + \underbrace{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \right)}_{\|B\|} \end{aligned}$$

   donc $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \right) \leqslant \|A\| + \|B\|$ i.e. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

2. (a) Soient $A = [a_{i,j}]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. On a alors :

$$AX = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} x_j \right)$$

   et ainsi $\|AX\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right|$.

   Mais pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$ on a :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} x_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,\|X\|_\infty = \|X\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \\ &\leqslant \|X\|_\infty \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = \|X\|_\infty \|A\| \end{aligned}$$

   Il en résulte que $\|AX\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leqslant \|X\|_\infty \|A\|$ comme souhaité.

   (b) • Soit i_0 dans $\{1, \ldots, n\}$ tel que $\|A\| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$. On considère alors par exemple le vecteur $X_0 = (x_1, \ldots, x_n)$ tel que pour j dans $\{1, \ldots, n\}$ on ait :

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i_0,j} \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } a_{i_0,j} \geqslant 0 \end{cases}$$

de sorte que pour tout j dans $\{1,\ldots,n\}$ on ait $a_{i_0,j}x_j = |a_{i_0,j}|$. On a ainsi $\|X_0\|_\infty = 1$ et :

$$AX_0 = \left(\sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{n,j}x_j\right)$$

Mais pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ on a $|a_{i,j}x_j| = |a_{i,j}|$ donc $\|AX_0\|_\infty = \|A\|$ ce qui implique :

$$\boxed{\|AX_0\|_\infty = \|A\| \ \|X_0\|_\infty}$$

• Pour tout X dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|A\| \ \|X\|_\infty$ donc $\|A\| \geqslant \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ et ainsi on a correctement :

$$\|A\| \geqslant \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$$

Mais on vient de voir qu'il existe X_0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\|AX_0\|_\infty = \|A\| \ \|X_0\|_\infty$ i.e. $\|A\| = \dfrac{\|AX_0\|_\infty}{\|X_0\|_\infty}$ donc on a bien :

$$\boxed{\|A\| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}}$$

(c) Soient $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $C = AB = [c_{i,j}]$. Pour tout (i,j) dans $\{1,\ldots,n\}^2$ on a :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$$

donc pour tout i dans $\{1,\ldots,n\}$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |c_{i,j}| &= \sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right| \leqslant \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \max_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^n |b_{k,j}|\right) = \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|\,\|B\| = \|B\| \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \\
&\leqslant \|B\| \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| = \|B\| \ \|A\|
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\|AB\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^n |c_{i,j}|\right) \leqslant \|B\| \ \|A\|$.

3. (a) • Supposons que la suite (A_m) converge vers A. On a donc $\|A_m - A\| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Mais pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ on a $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}(m) - a_{i,j}| \leqslant \|A_m - A\|$ donc (par sandwich)

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}(m) - a_{i,j}| = 0$$

et ainsi, puisque tous les termes de ces sommes sont positifs, on a pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$:

$$\lim_{m\to+\infty} |a_{i,j}(m) - a_{i,j}| = 0 \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\lim_{m\to+\infty} a_{i,j}(m) = a_{i,j}}$$

Commentaire. On peut tout aussi bien utiliser l'équivalence de $\| \ \|$ avec $\| \ \|_i nfty$.

• Réciproquement supposons que pour tout (i,j) dans $\{1,\dots,n\}^2$ on ait : $\lim\limits_{m\to+\infty} a_{i,j}(m) = a_{i,j}$.

Par somme finie :

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}(m) - a_{i,j}| = 0.$$

Mais $\|A_m - A\| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}(m) - a_{i,j}|$ donc, par sandwich, $\lim\limits_{m\to+\infty} \|A_m - A\| = 0$.

(b) On a :

$$\|A_mB_m - AB\| \leqslant \|A_mB_m - AB_m\| + \|AB_m - AB\| \leqslant \|B_m\|\,\|A_m - A\| + \|A\|\,\|B_m - B\|$$

Mais $\|B_m\| \leqslant \|B_m - B\| + \|B\|$ et la suite $(\|B_m - B\|)$ est bornée (puisque convergente) donc $(\|B_m\|)$ est bornée ; il existe ainsi C constante réel telle que :

$$\|A_mB_m - AB\| \leqslant C\,\|A_m - A\| + \|A\|\,\|B_m - B\| \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}$$

Enfin $\|A_m - A\| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|B_m - B\| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par sandwich :

$$\boxed{\|A_mB_m - AB\| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

4. (a) On obtient de suite par récurrence $\|A^m\| \leqslant \|A\|^m$ et ainsi, puisque $\|A\| < 1$, il vient par sandwich

$$\exists \lim_{m\to+\infty} \|A\|^m = 0.$$

(b) • Si λ est une valeur propre de A alors on dispose de X vecteur non nul dans $\mathbb{R}^n$ tel que $AX = \lambda X$. Or $\|AX\|_\infty = \|\lambda X\|_\infty = |\lambda|\,\|X\|_\infty$ et on a vu que $\|AX\|_\infty \leqslant \|A\|\,\|X\|_\infty$ donc il vient :

$$\lambda\,\|X\|_\infty \leqslant \underbrace{\|A\|}_{<1}\,\|X\|_\infty < \|X\|_\infty$$

et comme $\|X\|_\infty > 0$ il reste $\boxed{|\lambda| < 1}$.

• Ainsi -1 et 1 ne sont pas valeurs propres de A ce qui signifie exactement que les matrices $I - A$ et $I + A$ sont inversibles.

(c) Si m est un entier naturel on a $(I - A)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{m} A^k\right) = I - A^{m+1}$ et on sait que $(I - A)$ est inversible donc il vient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} A^k = (I - A^{m+1})(I - A)^{-1}$.

Mais $A^{m+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $(I - A^{m+1})(I - A)^{-1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} (I - A)^{-1}$ et ainsi : la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{m} A^k\right)$ converge vers $(I - A)^{-1}$.

NB. Pour $n = 1$ on doit retrouver le résultat bien connu des séries géométriques...

5. a. Pour tout $q \geqslant p$ entier on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} N^k = \sum_{k=0}^{p-1} N^k$ puisque $N^p = 0$. Il en résulte que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} N^k$ converge et sa somme est :

$$\boxed{M = \sum_{k=0}^{p-1} N^k}$$

b. On procède par double inclusion.

• Démontrons que $\{X \in \mathbb{R}^n \mid (M-I)X = 0\} \supset \{X \in \mathbb{R}^n \mid NX = 0\}$. Soit X dans $\mathbb{R}^n$ tel que $NX = 0$. On a alors :

$$(M-I)X = \sum_{k=1}^{p-1} N^k X = \sum_{k=1}^{p-1} N^{k-1}(\underbrace{NX}_{=0}) = 0$$

donc on a bien $\boxed{\{X \in \mathbb{R}^n \mid (M-I)X = 0\} \supset \{X \in \mathbb{R}^n \mid NX = 0\}}$.

• Démontrons l'inclusion réciproque. Soit X dans $\mathbb{R}^n$ tel que $(M-I)X = 0$. On a donc $\sum_{k=1}^{p-1} N^{k-1}(NX) = 0$ i.e. :

$$NX + \frac{1}{2}N^2X + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}N^{p-1}X = 0$$

Comme $N^P = 0$, en multipliant à gauche par N^{p-2} on obtient $N^{p-1}(X) = 0$ et ainsi il reste :

$$NX + \frac{1}{2}N^2X + \cdots + \frac{1}{(p-2)!}N^{p-2}X = 0$$

On multiplie par N^{p-3} à gauche pour obtenir $N^{p-2}(X) = 0$ et en itérant ce procédé il reste $N(X) = 0$.

Conclusion. . On a $\boxed{\{X \in \mathbb{R}^n \mid (M-I)X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid NX = 0\}}$

6. a. On écrit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ de sorte que pour tout k entier naturel on a :

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Ainsi pour tout m entier naturel il vient :

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}D^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$

Mais en vertu de la question IA3a on a $\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Ainsi $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}D^k \text{ converge}}$.

b. Pour tout k entier naturel on a : $\left(PDP^{-1}\right)^k = PD^kP^{-1}$. Ainsi pour tout m entier naturel il vient :

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left(PDP^{-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} PD^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} D^k\right) P^{-1}$$

Mais on a vu que $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} D^k \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(D)$ donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k\right) P^{-1}$.

Ainsi $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} A^k \text{ converge de somme } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = P\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k\right) P^{-1}}$.

7. On suppose que A est diagonalisable. On écrit $A = PDP^{-1}$ avec ...On a alors $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$ et il vient de suite :

$$\det\exp(A) = \det\exp(D) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}D} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}.$$

8. a. Comme les matrices I et A commutent, la formule du Binôme de Newton donne correctement :

$$A_m = \left(I + \frac{1}{m}\, A\right)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{1}{m^k}\, A^k = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{m^k(m-k)!} \frac{1}{k!}\, A^k$$

Il vient ainsi :

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\, A^k - A_m \quad = \quad \sum_{k=0}^{m} \left(1 - \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}\right) \frac{1}{k!}\, A^k$$

On passe alors à la norme et avec l'inégalité triangulaire on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k - A_m\right\| &= \left\|\sum_{k=0}^{m} \left(1 - \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}\right) \frac{1}{k!}\, A^k\right\| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{m} \left\|\left(1 - \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}\right) \frac{1}{k!}\, A^k\right\| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{m} \left|\left(1 - \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}\right)\right| \frac{1}{k!}\, \left\|A^k\right\|
\end{aligned}$$

Mais pour tout k entier naturel on a $\left\|A^k\right\| \leqslant \|A\|^k$ et $1 \geqslant \dfrac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}$ ce qui amène :

$$\boxed{\left\|\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k - A_m\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{m} \left(1 - \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}\right) \frac{\|A\|^k}{k!}}$$

b. Pour m entier naturel on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k - A_m\right\| &\leqslant \sum_{k=0}^{m} \left(1 - \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}\right) \frac{\|A\|^k}{k!} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{\|A\|^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k} \frac{\|A\|^k}{k!} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{\|A\|^k}{k!} - \left(1 + \frac{\|A\|}{m}\right)^m
\end{aligned}$$

Mais on a $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{\|A\|^k}{k!} = \mathrm{e}^{\|A\|}$ et, classiquement, $\boxed{\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \left(1 + \frac{\|A\|}{m}\right)^m = \mathrm{e}^{\|A\|}}$.

$$\boxed{\boxed{\text{Important}}}$$

Si a est un réel alors la suite $u_n \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$ converge vers e^a. En effet on pose pour n entier $v_n = \ln u_n$ de sorte que :

$$v_n = n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} a \times \frac{a}{n} = a$$

donc $v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$ et, par continuité de l'exponentielle, $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^a$.

Il en résulte, par Sandwich, que :

$$\lim_{m\to+\infty} \left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}A^k - A_m \right\| = 0$$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}A^k \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(A)$ donc $\boxed{A_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(A)}$.

Partie II - Propriétés de l'exponentielle de matrice.

9. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $I = \exp(A-A) = \exp(A)\ \exp(-A)$ donc :

$$\boxed{\exp(A) \text{ est inversible d'inverse } \exp(-A)}$$

10. a. On a $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k = I + A + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k = I + A + A\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^{k-1}$.

On pose alors $\boxed{S_A = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^{k-1}}$ et on a bien $\boxed{\exp(A) = I + A(I+S_A)}$.

b. Pour le lecteur.

c. On a $\|S_A\| = \left\|\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^{k-1}\right\| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left\|A^{k-1}\right\| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}\|A\|^{k-1}$ donc si A est non nulle on obtient :

$$\|S_A\| \leqslant \frac{1}{\|A\|}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}\|A\|^k = \frac{1}{\|A\|}\left(\mathrm{e}^{\|A\|} - 1 - \|A\|\right)$$

Mais avec les notations de la question précédente, si $\|A\| < 1$, on a $f(\|A\|) < 0$ donc $\mathrm{e}^{\|A\|} - 1 - \|A\| < \|A\|$ ce qui permet d'affirmer que $\|S_A\| < 1$.

Le résultat reste bien sûr valable lorsque $A = 0$.

Conclusion. $\boxed{\text{Si } \|A\| < 1 \text{ alors } \|S_A\| < 1}$.

d. Comme $\exp(A) = I$ on a $A(I+S_A) = 0$ mais, comme $\|S_A\| < 1$, on sait que $(I+S_A)$ est inversible donc :

$$\boxed{A = A(I+S_A)(I+S_A)^{-1} = 0}$$

11. a. Soit M dans $SDP_n(\mathbb{R})$. Par hypothèse, les valeurs propres de M sont strictement positives. 0 n'est donc pas valeur propre de M : M est inversible.

Autre idée. Soit M dans $SDP_n(\mathbb{R})$. Puisque les valeurs propres de M sont strictement positives, 0 n'est pas valeur propre de M donc l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est injectif donc inversible (puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie) et ainsi M est inversible.

Conclusion. . $\boxed{\text{Toute matrice dans } SDP_n(\mathbb{R}) \text{ est inversible}}$.

b. Soit A dans $S_n(\mathbb{R})$. Il existe alors P dans $O_n(\mathbb{R})$ et D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = PDP^\top$. Il vient alors : $\exp(A) = P\ \exp(D)P^\top$ et on a vu que $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$ lorsque $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Ainsi on a :

$$\exp^\top(A) = ({}^\top P\ \exp(D)P^\top) = ({}^\top P^\top)\exp^\top(D)P^\top = P\ \exp(D)P^\top$$

donc $\boxed{\exp(A) \text{ est une matrice symétrique}}$. De plus ses valeurs propres sont les e^{λ_i} où les λ_i sont les valeurs propres de A donc sont strictement positives : $\boxed{\exp(A) \in SPD_n(\mathbb{R})}$

c. Soit B dans $SDP_n(\mathbb{R})$. On cherche une matrice A dans $S_n(\mathbb{R})$ telle que $\exp(A) = B$. Comme B est dans $SDP_n(\mathbb{R})$ on peut écrire $B = P\Delta P^\top$ où P est dans $O_n(\mathbb{R})$ et Δ est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale. Mieux on a :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

où chaque μ_i est strictement positif. On pose alors correctement $\lambda_i = \ln \mu_i$ pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$ et on considère les matrices :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = PDP^\top$$

Comme précédemment A est symétrique et $\exp(A) = B$.

Conclusion. $\boxed{\exp|_{S_n(\mathbb{R})} \text{ est une surjection de } S_n(\mathbb{R}) \text{ sur } SDP_n(\mathbb{R})}$.

12. a. Comme A est symétrique réelle, elle est orthogonalement diagonalisable : il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A = PDP^\top$. De plus, quitte à écahnger les lignes de P on peut supposer que $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$.

Puis on a vu que $\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$.

De même on peut écrire $\exp(B) = Q \begin{pmatrix} e^{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\mu_n} \end{pmatrix} Q^{-1}$ où les $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ sont les valeurs propres de B et Q est une matrice dans $GL_n(\mathbb{R})$.
Comme $\exp A = \exp B$, elles ont les mêmes valeurs propres, ce qui force, puisque $e^{\lambda_1} \leqslant \ldots \leqslant e^{\lambda_n}$ et $e^{\mu_1} \leqslant \ldots \leqslant e^{\mu_n}$, $e^{\lambda_i} = e^{\mu_i}$ i.e. $\lambda_i = \mu_i$ pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$.

Conclusion. $\boxed{A \text{ est } B \text{ ont les mêmes valeurs propres}}$.

b. Pour tout m entier naturel, puisque A et tout polynôme en A commutent, on a

$$A\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}A^k\right)=\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}A^k\right)A$$

donc en faisant tendre m vers $+\infty$ on obtient correctement $A\ \exp(A)=\exp(A)\ A$. Comme $\exp(A)=\exp(B)$ il vient donc :

$$\boxed{A\ \exp(B)=\exp(B)\ A}$$

c. i Pour f endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, notons $E_{\lambda,f}=\ker(f-\lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$

Soit x dans F. Il existe alors λ réel tel que $F=E_{\lambda,v}$ donc $v(x)=\lambda x$ et en regardant ce qui se passe avec les matrices on obtient de suite $\exp(v)(x)=\mathrm{e}^{\lambda}x$ et ainsi F est inclus dans le sous-espace propre $E_{\mathrm{e}^{\lambda},\exp(v)}$.

Puis on sait que v est diagonalisable donc $\exp(v)$ aussi et ainsi :

$$\mathbb{R}^n=\bigoplus_{\lambda\in\sigma(v)}E_{\lambda,v}=\bigoplus_{\lambda\in\sigma(v)}E_{\mathrm{e}^{\lambda},\exp(v)}$$

Or $E_{\lambda,v}\subset E_{\mathrm{e}^{\lambda},\exp(v)}$ donc $\dim E_{\lambda,v}\leqslant \dim E_{\mathrm{e}^{\lambda},\exp(v)}$ et s'il existe λ dans $\sigma(v)$ tel que $\dim E_{\lambda,v}<\dim E_{\mathrm{e}^{\lambda},\exp(v)}$ alors on aura l'absurdité :

$$n=\sum_{\lambda\in\sigma(v)}\dim E_{\lambda,v}<\sum_{\lambda\in\sigma(v)}\dim E_{\mathrm{e}^{\lambda},\exp(v)}=n$$

ce qui permet d'affirmer que pour tout λ dans $\sigma(v)$ on a $\dim E_{\lambda,v}=\dim E_{\mathrm{e}^{\lambda},\exp(v)}$ donc :

$$\boxed{F=E_{\lambda,v}=E_{\mathrm{e}^{\lambda},\exp(v)}}$$

Conclusion. Si F est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de v alors F est le sous-espace propre associé à la valeur propre e^{λ} de $\exp(v)$.

ii • Soit λ réel tel que $F=E_{\lambda,v}$. On a vu que $F=E_{\mathrm{e}^{\lambda},\exp(v)}$ donc pour tout x dans F on a $\exp(v)(x)=\mathrm{e}^{\lambda}x$. Mais u et $\exp(v)$ commutent en vertu de la question B4b donc :

$$\exp v(u(x))=u(\exp(v)(x)=u(\mathrm{e}^{\lambda}x)=\mathrm{e}^{\lambda}u(x)$$

donc $u(x)\in E_{\mathrm{e}^{\lambda},\exp(v)}=F$ ce qui permet d'affirmer que $\boxed{F \text{ est } u\text{-stable}}$.

• L'endomorphisme induit u_F (qui est donc correctement défini) est diagonalisable puisque symétrique (car u l'est).

d. • Soit λ une valeur propre de v (donc de u, puisque A et B ont les mêmes valeurs propres). On a vu que $E_{\lambda,v}=E_{\mathrm{e}^{\lambda},\exp(v)}$. Comme $\exp(u)=\exp(v)$, il vient $E_{\mathrm{e}^{\lambda},\exp(v)}=E_{\mathrm{e}^{\lambda},\exp(u)}$. Les rôles de u et v étant symétriques, on a $E_{\mathrm{e}^{\lambda},\exp(u)}=E_{\lambda,u}$. Il en résulte que :

$$E_{\lambda,v}=E_{\lambda,u}.$$

Ainsi $\boxed{u \text{ et } v \text{ ont les mêmes vecteurs propres associés à une même valeur propre}}$.

• Appelons $\mu_1, \ldots, \mu_p$ les valeurs propres distinctes de v. Comme v est diagonalisable (car symétrique), on peut écrire $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\mu_i,v}$. Mais l'endomorphisme induit par f sur chaque $E_{\mu_i,v}$ est diagonalisable (question précédente) : il existe une base β_i de $E_{\mu_i,v}$ constituée de vecteurs propres de f, pour la valeur propre μ_i. Comme la somme $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\mu_i,v}$ est directe, $\beta = Rec(\beta_1, \ldots, \beta_p)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, constituée de vecteurs propres communs à u et v dont les valeurs propres associées à u et v respectivement sont égales : u et v sont égaux sur β donc ils sont égaux.

Conclusion. $\boxed{u = v \text{ donc } A = B}$.