Composition n° 2, bis

Le samedi 18 octobre 2024

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

La ***présentation*** *de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice - Calcul d'une intégrale impropre

Soit la fonction d'une variable réelle $\phi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$.

1. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(u)\,\mathrm{d}u$, notée K.
2. Déterminer l'ensemble D des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}\,\mathrm{d}u$ converge.
   On note alors $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}\,\mathrm{d}u$.
3. Déterminer le sens de variation de F sur D (on pourra comparer deux images).

On admet que la fonction F est dérivable sur D et qu'elle vérifie

$$\forall x \in D\,, \qquad x\,F'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) F(x) = -K\,.$$

Pour tout $x \in D$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x)$.

4. En dérivant la fonction $H : x \mapsto G(x) - K \displaystyle\int_0^{x} \phi(u)\,\mathrm{d}u$, démontrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x \in D\,, \qquad G(x) = C - K \int_0^{x} \phi(u)\,\mathrm{d}u\,.$$
5. Déterminer la limite de G en $+\infty$, et en déduire une relation entre C et K.
6. a. Prouver la convergence et calculer l'intégrale
$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t\,.$$
   (on pourra utiliser le changement de variable $u : t \to \sqrt{t}$ après l'avoir justifié).

   b. Soit $x \in D$. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t$.

   c. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,\mathrm{d}t\right] = 0$.

   d. En déduire la limite de G en 0, puis la valeur de C.
7. En déduire la valeur de K.

Problème - Autour de l'exponentielle de matrices

Dans le problème n est un entier tel que $n \geqslant 2$. On notera I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on pose : $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, ce qui définit une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Partie I - Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Démontrer que l'application qui à toute matrice $A = [a_{i,j}]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe le réel $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on notera $\| \ \|$ dans la suite du problème.
2. a. Pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et X dans $\mathbb{R}^n$ établir que : $\|AX\|_\infty \leqslant \|A\| \ \|X\|_\infty$.
   b. Démontrer qu'il existe un vecteur $X_0 \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que :
   $$\|AX_0\|_\infty = \|A\| \ \|X_0\|_\infty$$
   En déduire que $\|A\| = \sup\limits_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$.
   c. Démontrer que pour tout couple (A, B) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ on a : $\|AB\| \leqslant \|A\| \ \|B\|$.

   Une définition. *On dit que la suite* (A_m) *de matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *converge vers une matrice* A *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *lorsque*
   $$\lim_{m \to +\infty} \|A_m - A\| = 0$$
   Pour la suite on écrit $A_m = [a_{i,j}(m)]$ *et* $A = [a_{i,j}]$.
3. a. Démontrer que la suite (A_m) converge vers A si et seulement si pour tout (i, j) dans $\{1, \ldots, n\}^2$ on a :
   $$\lim_{m \to +\infty} a_{i,j}(m) = a_{i,j}$$
   b. Démontrer que si (A_m) converge vers A et (B_m) converge vers B alors la suite $(A_m B_m)$ converge vers AB.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1$.
   a. Déterminer $\lim\limits_{m \to +\infty} A^m$.
   b. Démontrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda| < 1$. En déduire que les matrices $I - A$ et $I + A$ sont inversibles.
   c. Démontrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{m} A^k \right)$ converge et exprimer sa limite en fonction de A.

   Une définition. *Si* (A_m) *est une suite de matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *on dit que la série* $\sum\limits_{k \geqslant 0} A_k$ *converge lorsque la suite* $\left(\sum\limits_{k=0}^{m} A_k \right)_m$ *converge vers une matrice* A *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et on écrit alors* $A = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$.
5. On considère dans cette question une matrice non nul N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est nilpotente d'ordre $p \geqslant 2$ i.e. telle que $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$.

a. Démontrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} N^k$ converge. On note $M = \sum_{k=0}^{+\infty} N^k$.

b. Démontrer que $\{X \in \mathbb{R}^n \mid (M-I)X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid NX = 0\}$.

6. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. On écrit $A = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Démontrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} D^k$ converge.

b. Démontrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} A^k$ converge et expliciter $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ en fonction de P et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k$.

Une propriété admise. *On admettra jusqu'à la fin du problème que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} M^k$ converge et on note* $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$.

7. Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable alors $\det(\exp(A)) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}$.

8. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout m dans $\mathbb{N}^*$ on pose : $A_m = \left(I + \frac{1}{m} A\right)^m$.

a. Etablir l'inégalité : $\left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k - A_m \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{m} \left(1 - \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}\right) \frac{\|A\|^k}{k!}$

b. En déduire que la suite (A_m) converge vers $\exp(A)$.

Partie II - Propriétés de l'exponentielle de matrice.

On admet que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ***qui commutent*** *alors on a*

$$\exp(A+B) = \exp(A)\ \exp(B)$$

9. Démontrer que pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $\exp(A)$ est inversible et préciser son inverse.

10. a. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe S_A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\exp(A) = I + A(I + S_A)$$

b. Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - 2x$.

c. En déduire que si $\|A\| < 1$ alors $\|S_A\| < 1$.

d. On suppose que $\|A\| < 1$ et $\exp(A) = I$. Démontrer que $A = 0$.

11. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n dont les valeurs propres sont strictement positives.

a. Démontrer que toute matrice dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est inversible.

b. Démontrer que si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors $\exp(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

c. Montrer que $\exp|_{S_n(\mathbb{R})}$ est une surjection de $S_n(\mathbb{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

12. Soient A et B deux matrices de $S_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp(A) = \exp(B)$. On note u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et B respectivement ainsi que $\exp(u)$ et $\exp(v)$ les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $\exp(A)$ et $\exp(B)$.

   a. Démontrer que A et B ont les mêmes valeurs propres.

   b. Démontrer que $A\ \exp(B) = \exp(B)\ A$.

   c. Soit F un sous-espace propre de v.

      i Démontrer que F est aussi un sous-espace propre de $\exp(v)$.

      ii Démontrer que F est u stable et que l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable.

   d. Démontrer que u et v ont les mêmes vecteurs propres puis que $A = B$.