Composition n° 1

Le samedi 21 septembre 2024

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

La ***présentation*** *de la copie doit être correcte, les résultats mis en valeur et les feuilles numérotées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. La clarté, la précision et la concision de la rédaction entrent dans une part importante de l'évaluation.*

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun.

Exercice - Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Les questions marquées (*) de cet exercice sont réservées aux 5/2.

Présentation générale

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un **unique** couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V)) \ .$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V.
Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n + 1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.
Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B, on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X \,,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie A - Généralités et exemples

1. Dans cette question, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
   a) Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.
   b) On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

   $$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2 \,.$$

   Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

2. **Étude d'un premier exemple**. Dans cette question uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1\,.$$

a) Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})\,.$$

b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M.

c) **(*)** Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ.

3. **Étude d'un second exemple**. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

a) Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})\,.$$

b) Montrer que la matrice T est diagonalisable (c'est à dire semblable à une matrice diagonale) si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie B - Cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.
On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \ldots, x_n$ par :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}\,, \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}\,.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in \{0, \ldots, n\}^2\,, \quad L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k \end{cases}\,.$$

4. **Décomposition avec les polynômes de Lagrange**

a) Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \ldots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

b) Déduire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a : $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.

c) Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

5. **Réduction de l'endomorphisme** φ Pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n\}$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.

a) Soit $(j, k) \in \{0, \ldots, n\}^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

b) En utilisant la question 4b, en déduire pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ que $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$.

c) **(*)** Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Problème - Somme de projecteurs

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ sur le corps des réels et T un endomorphisme non nul de E.

Soit$\mathcal{B}$ une base de E, on note $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ la matrice représentant T dans cette base. On note $\ker T$ le noyau de T et $\operatorname{Im} T$ l'image de T.
On dit que T est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité. On appelle projecteur un endomorphisme P de E idempotent, c'est-a-dire tel que $P^2 = P$. On note I l'endomorphisme identité de E, $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n$ et $\mathbb{O}_n$ la matrice nulle.

Partie 1 - Traces et projecteurs

Si $\mathbb{A}$ est élément de $\mathcal{M}_n$, on appelle trace de $\mathbb{A}$ le nombre réel suivant : $\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ ·

1. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ éléments de $\mathcal{M}_n$, montrer que $\operatorname{tr}(\mathbb{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbb{BA})$.
2. Montrer que la trace de la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ associée à T est indépendante de la base $\mathcal{B}$.

On appelle trace de T, notée $\operatorname{tr}T$, la valeur commune des traces des matrices représentant T. On dit que la trace est un invariant de similitude.
Soit P un projecteur de E. On pose $Q = I - P$.

3. Démontrer que $E = \operatorname{Im} P \oplus \ker P$.
4. En déduire que $\operatorname{rg}P = \operatorname{tr}P$.
5. Montrer que $\operatorname{Im} Q = \ker P$ et que $\operatorname{Im} P = \ker Q$.
6. Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de E est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.
7. Montrer que si l 'endomorphisme S est une somme finie de projecteurs P_i , $i \in [\![1, m]\!]$ alors $\operatorname{tr}S \in \mathbb{N}$ et $\operatorname{tr}S \geqslant \operatorname{rg}S$.

Partie 2 - Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur P est égal à 1.

8. Démontrer qu 'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $PTP = \mu P$.
   Soit $\mathcal{C} = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im} P \oplus \ker P$.
9. Montrer que dans la base $\mathcal{C}$ la matrice représentant T s 'écrit

$$(1) \qquad \mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \mu & * & \cdots & * \\ * & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ * & & & \end{pmatrix}.$$

   où μ est le nombre réel dont l'existence a été prouvé en question 8 et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n-1}$.
10. Montrer que si $P'TP'$ n'est pas proportionnel à P', alors $\mathbb{B}$, défini en (1), n 'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $P' = I - P$.

Partie 3 - Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l 'endomorphisme T n'est pas une homothétie.

11. Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que x et $T(x)$ ne soient pas liés (c 'est-à-dire ne soient pas colinéaires).
12. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ dans laquelle la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante :
$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$
où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n-1}$.
13. En déduire que si $\mathrm{tr}T = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$ est nulle.

    Soit t_i avec $i = [\![1, n]\!]$ une suite de n nombres réels vérifiant $\mathrm{tr}T = \sum_{i=1}^{n} t_i$.
14. En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ a pour éléments diagonaux t_1 et t_2.

    Soit $t \in \mathbb{R}$, on admettra qu'en dimension $n \geqslant 3$, il existe un projecteur L de E de rang 1, tel que d'une part $LTL = tL$ et d'autre part $L'TL'$ ne soit pas proportionnel à $L' = I - L$.
15. En dimension $n \geqslant 3$, à l'aide des questions 9 et 10 démontrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ dans laquelle la matrice représentant T s'écrit
$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} t_1 & * & \cdots & * \\ * & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ * & & & \end{pmatrix}.$$
où $\mathbb{B}$ n'est pas une homothétie.
16. En dimension $n \geqslant 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les t_i où $i \in [\![1, n]\!]$.

Partie 4 - Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que T est un endomorphisme de E vérifiant $\mathrm{tr}T \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}T \geqslant rgT$. On pose $\rho = rgT$ et $\theta = \mathrm{tr}T$.

17. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante :
$$\begin{pmatrix} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$
où $\mathbb{T}_1$ est une matrice de taille $\rho * \rho$.
18. *Supposons que $\mathbb{T}_1$ ne soit pas la matrice d'une homothétie.*
    a) A l'aide de la question 16 montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle
    $$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}'_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}'_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$
    où $\mathbb{T}'_1$ admet comme termes diagonaux des entiers non nuls t_i avec $i \in [\![1, \rho]\!]$.
    b) En déduire que T est la somme d'un nombre fini de projecteurs.
19. *On suppose maintenant que T_1 est la matrice d'une homothétie.*
    Démontrer que là encore, T est la somme d'un nombre fini de projecteurs.